2023학년도 논술고사

자연계열(오후)

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이고 $f(0)=f(1)=0$을 만족하면 **좋은함수**라 하자. 특히 좋은함수 $f(x)$가 $f'(0)=a$, $f'(1)=b$이면 $f(x)$를 $\ll a, b \gg$**-좋은함수**라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 좋은함수라면 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$, $(f \circ g)(x)$ 도 좋은함수이다.

한편 $f(x)$가 좋은함수이면 평균값 정리에 의하여 양의 실수 p에 대하여

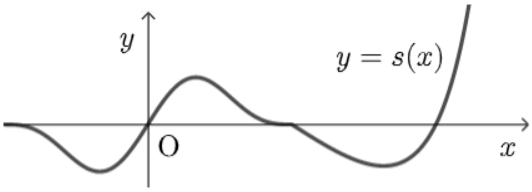
$$\frac{f(p)-f(0)}{p-0}=\frac{f(p)}{p}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, p)$에 존재한다.

(나) 함수 $g(x)=\cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $h(x)=xe^{x^2-1}-x$에 대하여 함수 $s(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$s(x)=\begin{cases} g(x) & (x \leq 1) \\ h(x-1) & (x > 1) \end{cases}$$

이때 $s(x)$는 연속함수이고 $s(0)=s(1)=0$ 이지만 $g'(1) \neq h'(0)$이므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다. 따라서 $s(x)$는 좋은함수가 아니다.



[문제 1-1] (25점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) $\ll 0, 0 \gg$-좋은함수인 사차함수 $f(x)$의 극댓값이 2^{10}이고 $A = \log 2$, $B = \log 3$일 때, $\log f(6)$ 의 값을 A와 B로 나타내라.

(2) 좋은함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속인 이계도함수 $f''(x)$를 갖고, $0 < p < 1$인 실수 p에 대하여 $f(x)$가 $x = p$에서 최댓값 2023을 가진다. 이때 $\int_a^b f''(x)\,dx = \dfrac{2023}{p(p-1)}$을 만족하는 두 실수 a, b가 열린 구간 $(0, 1)$에 존재함을 증명하라.

[문제 1-2] (25점) 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 제시문 (나)의 함수 $s(x)$에 대하여 $\int_0^2 s(x)dx$ 의 값을 구하라.

(2) 9 이하의 자연수 a, b, c, d, e, f에 대하여 $p(x)$는 $\ll a, b \gg$-좋은함수, $q(x)$는 $\ll c, d \gg$-좋은함수, $r(x)$는 $\ll e, f \gg$-좋은함수이다. 두 함수 $G(x) = p(q(x)) + p(x)q(x)$와 $H(x) = q(r(x)) + 2r(x)$에 대하여 함수 $S(x)$를 아래와 같이 정의하자.

$$S(x) = \begin{cases} G(x) & (x \le 1) \\ H(x-1) & (x > 1) \end{cases}$$

$S(x)$가 $\ll n, 24 \gg$-좋은함수이고 자연수 n이 24의 약수가 되는 순서쌍 (a, b, c, d, e, f)의 개수를 구하라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 닫힌구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구하거나 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수를 구할 때, 극값이나 양 끝 값 등 특정 함숫값을 비교하는 것으로 충분할 수 있다. 가령 삼차함수 $f(x)=x^3-3ax+b$에 대하여 닫힌구간 $[-2,2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 구하는 문제를 생각해 보자. $0<a<4$인 경우 $f(x)$는 $x=\pm\sqrt{a}$에서 극값을 가지므로 $|f(-2)|$, $|f(-\sqrt{a})|$, $|f(\sqrt{a})|$, $|f(2)|$를 비교해서 $|f(x)|$의 최댓값을 구할 수 있고, 그렇지 않으면 $|f(-2)|$와 $|f(2)|$를 비교해서 $|f(x)|$의 최댓값을 구할 수 있다.

(나) 실수 a, b에 대하여 함수 $F(x)=x^4+ax^2+b$에서 $t=x^2$으로 치환하여 얻은 이차함수 $f(t)=t^2+at+b$를 생각하자. 실수 α에 대하여 $F(\alpha)=0$이면 $f(\alpha^2)=0$을 만족한다. 따라서 방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지는 것은 방정식 $F(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지기 위한 필요충분조건이다.

[문제 2-1] (20점) 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 함수 $f(x)=x^3-3ax+a$에 대하여 방정식 $f(x)=0$이 닫힌구간 $[-2,\,2]$에서 서로 다른 세 실근을 가지도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.

(2) 함수 $f(x)=x^3-3ax+2$에 대하여 닫힌구간 $[-2,2]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이 가장 작아지도록 하는 실수 a의 값과 그때의 $|f(x)|$의 최댓값을 구하라.

[문제 2-2] (30점) 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 함수 $F(x)=x^4+ax^2+b$ 에 대하여 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 가지고 모든 실근의 절댓값이 양수 A 보다 크다고 하자. 방정식 $F'(x)=0$의 0이 아닌 실근의 절댓값이 A 보다 크다는 것을 증명하라. (단, a, b는 상수)

(2) 함수 $F(x)=x^4-x^2+c$에 대하여, 방정식 $F(x)=0$이 서로 다른 네 실근 p, q, r, s $(p<q<r<s)$를 가지고 $\int_p^s F(x)\,dx=0$을 만족할 때, 상수 c를 구하라.

(3) 함수 $G(x)=x^4-4x^3+9x-\frac{11}{2}$에 대하여, 다음 <조건>을 만족하는 일차함수 $L(x)$를 구하라.

< 조 건>

① $F(x)=x^4+ax^2+b$ (단, a, b는 상수)
② $G(x)=F(x-m)+L(x)$ (단, m은 상수)
③ 방정식 $G(x)-L(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 가지고, 가장 큰 실근 t에 대하여

$$\int_m^t (G(x)-L(x))\,dx=0$$