2023학년도 논술고사

자연계열(오전)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2023학년도 자연계열(오전) 모범답안

자연계열 (오전)

[문제1-1]

(1) 두 번째 가로수열과 두 번째 세로수열이 등차수열이므로 $a+e=c+d=20$이다. 이로부터 $a+c+d+e=40$을 얻는다. 한편 첫 번째 세로수열은 등비수열이므로 $c^2=400$이고 $c=\pm 20$이다. 만약 $c=20$이면, $d=0$이 되어 세 번째 가로수열 b, d, 10이 등비수열을 이룬다는 조건에 모순이다. 따라서 $c=-20$일 수밖에 없고 $d=40$이 된다. 세 번째 가로수열이 등비수열이라는 조건을 사용하여 $b=160$을 얻는다. 처음 얻은 식과 종합하면 $a+b+c+d+e=200$이다. (3-등차등비표를 완성하면 아래와 같다.)

10	40	160
-20	10	40
40	-20	10

(2) ②에 의하여, 첫 번째 가로수열은 등차수열이 될 수 없으므로 공비가 1이 아닌 등비수열이 된다. 이 가로수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자. 조건에 따라 a는 홀수이고 ar과 ar^2은 짝수이다. ①로부터 $ar^2 \le 9$이므로, $a=1$, $r=2$이거나 $a=9$, $r=\frac{3}{2}$이어야 한다. 한편, ③에 의하여 첫 번째 세로수열은 등비수열이 될 수 없으므로 공차가 0이 아닌 등차수열이 된다. 이 세로수열의 공차를 d라 하자. d는 홀수이며 $a+2d \le 9$이므로, $a=1$일 때 $d=1$ 또는 3이고 $a=9$일 때 $d=-1$ 또는 -3이다. 이에 따라 총 4가지 경우를 모두 고려하면 아래의 그림과 같다. 나머지 칸을 그림과 같이 x, w, y, z라 두자.

1	2	4
2	x	w
3	y	z

$a=1$, $d=1$

1	2	4
4	x	w
7	y	z

$a=1$, $d=3$

9	6	4
8	x	w
7	y	z

$a=9$, $d=-1$

9	6	4
6	x	w
3	y	z

$a=9$, $d=-3$

만약 z가 짝수이면, 세 번째 가로수열인 3, y, z 또는 7, y, z가 홀수로 시작하여 짝수로 끝나므로 등차수열일 수 없다. 또한 z가 9 이하의 짝수라는 조건 때문에 등비수열도 될 수 없어 모순이다. 따라서 z가 홀수여야 하고, 세 번째 세로수열인 4, w, z는 등차수열이 될 수 없다. 따라서 세 번째 세로수열은 등비수열이 되어 4, 2, 1이거나 4, 6, 9이어야만 한다. 각 경우마다 x와 y를 결정하는 방법이 유일하므로 총 8개이다. (8개의 등차등비표를 완성하면 아래와 같다.)

1	2	4
2	2	2
3	2	1

1	2	4
4	3	2
7	4	1

9	6	4
8	5	2
7	4	1

9	6	4
6	4	2
3	2	1

1	2	4
2	4	6
3	6	9

1	2	4
4	5	6
7	8	9

9	6	4
8	7	6
7	8	9

9	6	4
6	6	6
3	6	9

(3) k번째 가로수열의 첫째항을 a_k, 제n항을 b_k라 하자. 모든 칸에 적힌 수의 총합이 20이라는 조건으로부터 $\sum_{k=1}^{n}\frac{n(a_k+b_k)}{2}=20$을 얻는다. 또한 $\alpha=\sum_{k=1}^{n}a_k$이고 $\beta=\sum_{k=1}^{n}b_k$이기 때문에, $n(\alpha+\beta)=40$이 된다. 한편 α와 β가 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 서로 다른 두 실근이므로, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5$이고 $\alpha\beta=p$이다. 따라서 $n=8$이다. 또한 $x^2-5x+p=0$가 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식에 의해 $25-4p>0$, 즉 $p<\frac{25}{4}$를 얻는다.

[문제 1-2]

(1) 첫째항이 4이고 제10항이 40인 등차수열의 공차는 4이다. 이 등차수열은 함수 $f(x)=\log_2 x$에 의하여 변환된 수열이므로, 변환하기 이전의 표에서는 첫째항이 2^4, 공비가 2^4인 등비수열이 된다. 이 등비수열의 합은 $2^4 \times \dfrac{2^{40}-1}{2^4-1} = \dfrac{16}{15}(2^{40}-1)$ 이다.

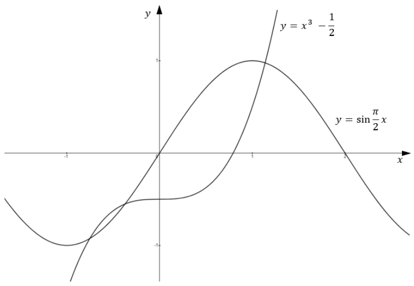
(2) 함숫값 $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(9)$ 는 각각 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1 이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$에 의해 변환된 표는 아래와 같다.

$a+b+1$	b	$a+b-1$
b	$a+b+1$	b
$a+b-1$	b	$a+b+1$

두 번째 가로수열이 등차수열이거나 등비수열이므로 $a=-1$ 또는 $(a+b+1)^2=b^2$ 이 성립한다. $a=-1$인 경우는 첫 번째 가로수열이 b, b, $b-2$가 되어 모순이다. 따라서 $a+b+1=-b$ 이고 $a=-2b-1$이다. 이를 대입하면 첫 번째 가로수열이 $-b$, b, $-b-2$ 이다. 항상 $-b \neq -b-2$이므로 등비수열이 될 수 없다. 첫 번째 가로수열이 등차수열인 조건을 사용하면 $b=-\dfrac{1}{2}$이고 $a=0$이므로 $g(x)=x^3-\dfrac{1}{2}$이다.

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

이제 구간을 나누어서 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$와 $y=x^3-\dfrac{1}{2}$의 그래프의 교점의 개수를 구하자.



$x>0$일 때, $g(0)<f(0)$이고 $f(2)<g(2)$ 이므로 그래프개형에 의하면 한 개의 교점을 가진다.
$x \le 0$일 때, 그래프 개형을 생각하면 교점은 많아야 두 개를 가짐을 알 수 있다. 두 함수의 그래프의 교점의 개수는 $h(x)=g(x)-f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{\pi}{2}x=0$의 실근의 개수와 같다.

한편 $h(0)=h(-1)=-\dfrac{1}{2}<0$이고 $\sqrt{3}>1.7$이므로

$$h\left(-\frac{2}{3}\right)=g\left(-\frac{2}{3}\right)-f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}-\frac{1}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{43}{54}+\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

이므로, 사잇값 정리로부터 방정식 $h(x)=0$는 열린구간 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$와 열린구간 $\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$에 실근을 가지게 된다. 즉, 이 경우 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.
따라서 전체 그래프의 교점의 개수는 3이다.

[문제2-1]

(1) r_1+1이 양수이므로

$$r_1+r_2=r_1+\frac{1-r_1}{1+r_1}=(1+r_1)+\frac{2}{1+r_1}-2 \geq 2\sqrt{2}-2>0.8$$

이다. 즉, $5(r_1+r_2)>4$가 성립한다.

(2) 직선의 기울기와 탄젠트함수의 정의로부터 $\theta_1=\cdots=\theta_n=\frac{\pi}{2(n+1)}$이다. 또한 $\sum_{i=1}^{n+1}\theta_i=\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)}$이다. $n+1$이하인 자연수 k에 대하여 원점과 원 C_k가 접하는 접점 사이의 거리가 1이므로 $r_k=\tan\frac{\theta_k}{2}=\tan\frac{\pi}{4(n+1)}$이고, $\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k=\tan\frac{\pi}{4(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{4(n+1)}$이다. 이제 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$을 사용하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n}\tan\frac{\pi}{4(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{8}\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{4(n+1)}}{\frac{\pi}{4(n+1)}}=\frac{\pi}{8}$$

(3) $k=1$인 경우는 $\tan\theta_1=p_1=1$이고, $k=n+1$인 경우는 $\tan\theta_{n+1}=\frac{1}{p_n}=\frac{1}{n}$이다.

$2\leq k\leq n$인 경우, $p_k=\tan\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_i\right)$이므로, $\tan\theta_k=\tan\left(\sum_{i=1}^{k}\theta_i-\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i\right)=\frac{p_k-p_{k-1}}{1+p_kp_{k-1}}=\frac{1}{1+k^2-k}$이다.

따라서 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\tan\theta_k}&=1+\sum_{k=2}^{n}(k^2-k+1)+n=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)+n\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+2n=\frac{n(n^2+5)}{3}=82\end{aligned}$$

이를 정리하면 $n^3+5n-246=(n-6)(n^2+6n+41)=0$이므로 $n=6$이다.

[문제2-2]

(1) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근 중 2 보다 큰 것의 개수를 m이라 하자. 그러한 m개의 실근을 $2+\alpha_1$, …, $2+\alpha_m$ $(\alpha_i>0)$이라 하면 $2-\alpha_1$, …, $2-\alpha_m$도 방정식 $f(x)=0$의 근이 된다. 따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 2가 아닌 서로 다른 실근을 모두 더한 값은 $4m$이 된다. 서로 다른 실근의 합인 34가 4의 배수가 아니므로, 2가 방정식 $f(x)=0$의 실근이 되어야 하고 $4m+2=34$를 얻는다. 즉, $m=8$이므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $2\times 8+1=17$ 이다.

(2) $\cos(\pi-x)=-\cos x$ 이므로 $f(\pi-x)=f(x)$이고, $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대칭이다. 제시문 (나)에 의해 $\int_0^{\pi}xf(x)\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)f(x)\,dx$ 이므로, $2\int_0^{\pi}xf(x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(x)dx$ 이다. 그래프의

대칭성으로부터

$$\int_0^{\pi} x f(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\, dx$$

이다. 여기서 $\sin x = t$로 치환하면 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\, dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{4-t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right) dt = \frac{\pi}{4}\left[-\ln(2-t)+\ln(2+t)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 3$$

2023학년도 논술고사

자연계열(오전) 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 2

2023학년도 자연계열(오전) 채점기준

자연계열
(오전)

하위문항	채점 기준	배점
[1-1] (1)	$a+e=c+d=20$임을 관찰	3점
	$c=-20$, $d=40$를 구함	3점
	$b=160$를 구하여 답 200을 얻음	4점
[1-1] (2)	첫 번째 가로수열이 $1, 2, 4$를 찾고 3-등차등비표를 2개 이상 4개 이하 찾음	4점
	3-등차등비표를 5개 이상 7개 이하 찾음	3점
	모든 경우를 다 찾아서 답 8을 얻음	3점
[1-1] (3)	$n(\alpha+\beta)=40$임을 관찰함	3점
	$n=8$을 얻음	4점
	$p<\dfrac{25}{4}$을 얻음	3점
[1-2] (1)	등비수열임을 관찰	3점
	공비가 2^4 임을 얻음	2점
	등비수열의 합을 구하여 $2^4\times\dfrac{2^{40}-1}{2^4-1}=\dfrac{16}{15}(2^{40}-1)$을 얻음	5점
[1-2] (2)	$a\neq-1$임을 관찰	2점
	등차등비표의 성질을 이용하여 $g(x)=x^3-\dfrac{1}{2}$를 찾음	3점
	그래프의 개형과 $x<0$인 영역에서 사잇값의 정리를 활용해 개수가 3임을 구함	5점

하위문항	채점 기준	배점
[2-1] (1)	$r_1+r_2=r_1+\dfrac{1-r_1}{1+r_1}=(1+r_1)+\dfrac{2}{1+r_1}-2$ 임을 보임.	5점
	$(1+r_1)+\dfrac{2}{1+r_1}-2 \geq 2\sqrt{2}-2>0.8$임을 보임.	5점
[2-1] (2)	$r_k=\tan\dfrac{\pi}{4(n+1)}$ 임을 보임.	3점
	$\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot\tan\dfrac{\pi}{4(n+1)}$ 임을 보임.	3점
	$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n}\tan\dfrac{\pi}{4(n+1)}=\dfrac{\pi}{8}$임을 보임.	4점
[2-1] (3)	$k=1$일 때, $\tan\theta_1=p_1=1$임을 보임.	1점
	$k=n+1$일 때, $\tan\theta_{n+1}=\dfrac{1}{p_n}=\dfrac{1}{n}$임을 보임.	2점
	$2\leq k\leq n$일 때, $\tan\theta_k=\dfrac{1}{1+k^2-k}$임을 보임.	4점
	$n=6$임을 보임.	3점
[2-2] (1)	방정식의 근이 $2+\alpha$, $2-\alpha$의 꼴로 나타나고 두 근의 합이 4임을 설명함.	4점
	방정식의 한 근이 2인 경우가 있음을 설명함.	3점
	방정식의 실근의 개수가 17임을 보임.	3점
[2-2] (2)	$\int_0^\pi xf(x)\,dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx$임을 보임.	3점
	$\dfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(x)\,dx=\pi\int_0^1\dfrac{1}{4-t^2}\,dt$ 임을 보임.	4점
	$\int_0^\pi xf(x)\,dx$ 이 $\dfrac{\pi}{4}\ln 3$임을 보임.	3점