2023학년도 논술고사

자연계열(오전)

성 명	
전 형	
수험번호	

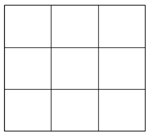
표지를 제외한 페이지 수 : 4

2023학년도 자연계열(오전) 논술고사

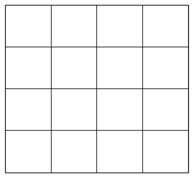
자연계열
(오전)

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 자연수 $n\,(n \geq 3)$에 대하여, 각 가로줄과 세로줄이 n개의 칸으로 이루어진 정사각형 모양의 표가 있다. [그림 1]은 $n=3$인 경우와 $n=4$인 경우를 표현한 것이다.



$n=3$인 경우



$n=4$인 경우

[그림 1]

이 표의 각 칸에 실수를 하나씩 적어, 위에서부터 k번째 가로줄에 적힌 n개의 수를 왼쪽에서 오른쪽으로 읽어 얻는 수열을 **k번째 가로수열**, 왼쪽에서부터 k번째 세로줄에 적힌 n개의 수를 위에서 아래로 읽어 얻는 수열을 **k번째 세로수열**이라 한다. 각 가로수열과 세로수열이 등차수열 또는 등비수열인 표를 **n-등차등비표**라 하자.

[그림 2]의 표는 각 가로수열과 세로수열이 등차수열 또는 등비수열이므로 모두 3-등차등비표이다.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

4	6	9
2	5	8
1	4	7

[그림 2]

(나) 함수 $f(x)$에 대하여, n-등차등비표의 각 칸마다 그 칸에 적힌 수 x 대신 $f(x)$를 적어 만든 표를 **$f(x)$에 의해 변환한 표**라 하자. 예를 들어 [그림 2]의 두 3-등차등비표를 $f(x)=2x$에 의해 변환한 표는 [그림 3]과 같다.

2	4	6
8	10	12
14	16	18

8	12	18
4	10	16
2	8	14

[그림 3]

2023학년도 자연계열(오전) 논술고사

자연계열
(오전)

[문제 1-1] 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 아래의 3-등차등비표에서 두 번째 가로수열과 두 번째 세로수열은 등차수열이며, 그 외 가로수열과 세로수열은 모두 등비수열일 때, $a+b+c+d+e$ 의 값을 구하라.

10	a	b
c	10	d
40	e	10

(2) 다음 <조건>을 만족하는 3-등차등비표의 개수를 구하라.

< 조 건 >

① 각 칸에 적힌 수는 9 이하의 자연수이다.
② 첫 번째 가로수열은 첫째항만 홀수이고 나머지 항은 짝수이다.
③ 첫 번째 세로수열은 둘째항만 짝수이고 나머지 항은 홀수이다.

홀	짝	짝
짝		
홀		

(3) 자연수 $n\,(n \geq 3)$에 대하여, n-등차등비표에 적힌 모든 수의 합이 20이고 각 가로수열이 등차수열이라 하자. 이 n-등차등비표의 첫 번째 세로수열의 합을 α라 하고 n번째 세로수열의 합을 β라 하자. α와 β가 이차방정식 $x^2-5x+p=0$ 의 서로 다른 두 실근일 때, n의 값을 구하고 실수 p의 범위를 구하라.

[문제 1-2] 제시문 (가)와 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 10-등차등비표를 $f(x)=\log_2 x$ 에 의해 변환한 표의 첫 번째 가로수열은 등차수열이며, 이 가로수열의 첫째항이 4이고 제10항이 40이라 하자. 변환하기 이전의 표에서 첫 번째 가로수열의 합을 구하라.

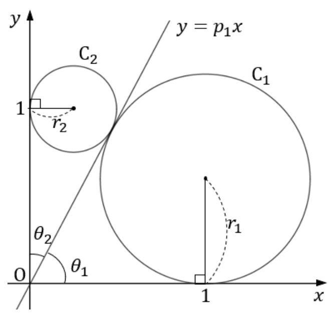
(2) 두 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 와 $g(x)=x^3+ax^2+b$ 에 대하여 아래 3-등차등비표를 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 에 의해 변환한 표가 3-등차등비표일 때, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수를 구하라. (단, $\sqrt{3}>1.7$)

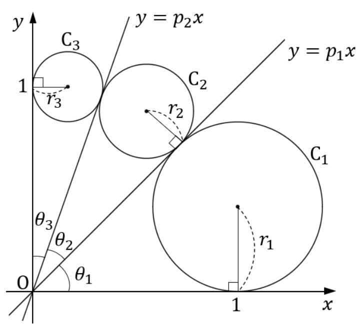
1	2	3
4	5	6
7	8	9

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 자연수 n에 대하여, $0 < p_1 < \cdots < p_n$을 만족하는 n개의 실수 $p_1, \ldots, p_n$이 있다. x축과 직선 $y = p_1 x$에 동시에 접하면서 점 $(1, 0)$을 지나며 중심이 제1사분면에 있는 원을 C_1이라 하자. y축과 직선 $y = p_n x$에 동시에 접하면서 점 $(0, 1)$을 지나며 중심이 제1사분면에 있는 원을 C_{n+1}이라 하자. $n \geq 2$일 때, $2 \leq k \leq n$인 자연수 k에 대하여, 두 직선 $y = p_{k-1}x$, $y = p_k x$와 원 C_{k-1}에 동시에 접하고 중심이 제1사분면에 있는 원을 C_k라 하자. x축과 직선 $y = p_1 x$가 이루는 예각을 θ_1, 직선 $y = p_n x$와 y축이 이루는 예각을 θ_{n+1}이라 하자. $n \geq 2$일 때, $2 \leq k \leq n$인 자연수 k에 대하여 두 직선 $y = p_{k-1}x$와 $y = p_k x$가 이루는 예각을 θ_k라 하자. $n+1$이하인 자연수 k에 대하여, 원 C_k의 반지름을 r_k라 하자.

[그림 4]는 $n = 1$인 경우와 $n = 2$인 경우를 표현한 것이다.





[그림 4]

한편 $n = 1$인 경우, $r_1 = \tan\dfrac{\theta_1}{2}$이고 $r_2 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta_1}{2}\right)$이므로, 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$r_2 = \frac{1 - \tan\dfrac{\theta_1}{2}}{1 + \tan\dfrac{\theta_1}{2}} = \frac{1 - r_1}{1 + r_1}$$ 이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = f(2p - x)$를 만족하는 실수 p가 존재하는 함수 $f(x)$를 생각하자. 함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = p$에 대하여 대칭이다. 따라서 $f(\alpha) = 0$이면 $x = 2p - \alpha$가 방정식 $f(x) = 0$의 실근이 된다. 한편 $\int_0^{2p} xf(x)\,dx$를 계산할 때, $x = 2p - t$로 치환하면 다음을 얻는다.

$$\int_0^{2p} xf(x)\,dx = \int_0^{2p} (2p - t)f(2p - t)\,dt = \int_0^{2p} (2p - x)f(x)\,dx$$

[문제 2-1] 제시문 (가)를 읽고 물음에 답하라.

(1) $n=1$일 때, $5(r_1+r_2)>4$임을 증명하라. (단, $\sqrt{2}>1.4$)

(2) n이하인 자연수 k에 대하여 $p_k=\tan\dfrac{k\pi}{2(n+1)}$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)r_k$를 구하라.

(3) n이하인 자연수 k에 대하여 $p_k=k$이고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\tan\theta_k}=82$일 때, n의 값을 구하라.

[문제 2-2] 제시문 (나)를 읽고 물음에 답하라.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 생각하자. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근을 모두 더하면 34일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하라.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{|\cos x|}{3+\cos^2 x}$에 대하여 $\displaystyle\int_0^{\pi}x\,f(x)\,dx$의 값을 구하라.