(별해) 전구 A, B를 구성하는 방법은 총 9가지의 경우가 있고 모두 확률이 같으므로 경우의 수를 세어서 구할 수 있다. 여기서 A, B, C중 같은 색이 있는 경우의 수를 빼주자. A, B, C가 모두 같은 색인 것은 불가능하다. 셋 중 두 개가 같은 색이 되는 경우들 역시 각각 유일하므로, 총 A, B, C중 같은 색이 있는 경우의 수는 3이다. 따라서 구하고자 확률은 $1-\frac{3}{9}=\frac{2}{3}$ 이다.

[2-2] (25점)

(1) (12점) <조건>을 만족하기 위해서는 첫 번째 비닐커버의 색은 노란색이어야 하고, k번째 비닐커버를 씌우기 이전에는 노란색, 흰색 비닐커버만 씌워야 한다. 그리고 k번째는 반드시 파란색이 나와야 하고, 그 이후에는 어떤 것이 나와도 상관없다. 따라서 <조건>을 만족하는 경우의 수는 $E_k = 2^{k-2}\times 3^{10-k}$ 이다.

$a=\log_{10}2$, $b=\log_{10}3$이라 두자. 한편 $\log_{10}E_k=(k-2)a+(10-k)b$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{10}\log_{10}E_k &= a\sum_{k=2}^{10}(k-2)+b\sum_{k=2}^{10}(10-k)\\ &= a(0+1+\cdots+7+8)+b(8+7+\cdots+1+0)\\ &=(a+b)\frac{8\times 9}{2}\end{aligned}$$

이다. 한편 $c=a+b$이므로 원하는 답은 $36c$ 이다.

(2) (13점) 먼저, $F_0 = F_1 = 0$임을 확인하자.

$k \ge 2$일 때 F_k를 구하기 위해 먼저 색이 변하는 k개의 전구를 고른다 (${}_nC_k$ 가지의 경우).

먼저, 전구에 k번째 비닐커버를 씌우면서 노란색에서 초록색으로 변한다고 가정하자.

처음 $k-1$ 번째 비닐커버를 겹쳐 씌울 동안 노란색 비닐커버가 반드시 한 번은 나오도록 비닐커버를 씌우는 경우의 수는 노란색과 흰색 비닐커버를 임의로 $k-1$개 고르는 경우의 수에서 흰색 비닐커버만 씌우는 경우를 제외하면 된다($2^{k-1}-1$). k번째 비닐커버는 반드시 파란색이어야 하며, 나머지 $n-k$ 개의 비닐커버의 경우는 제약이 없으므로 가능한 경우의 수는 3^{n-k}이다. 따라서 곱의 법칙의 의하여, 가능한 경우의 수는 ${}_nC_k\times(2^{k-1}-1)\times 3^{n-k}$이다,

전구에 k번째 비닐커버를 씌우면서 파란색에서 초록색으로 변하는 경우 역시 같은 방법으로 계산할 수 있으므로, $F_0 = F_1 = 0$, $F_k = {}_nC_k\times(2^{k-1}-1)\times 3^{n-k}\times 2$ (단, $k\ge 2$) 이다.

따라서 이항정리에 의해

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}F_k &= \left(\sum_{k=2}^{n}{}_nC_k2^k3^{n-k}-2\sum_{k=2}^{n}{}_nC_k3^{n-k}\right)=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k2^k3^{n-k}-2\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k3^{n-k}\right)+3^n\\ &=(2+3)^n-2(1+3)^n+3^n=5^n+3^n-2^{2n+1}\end{aligned}$$

이다.