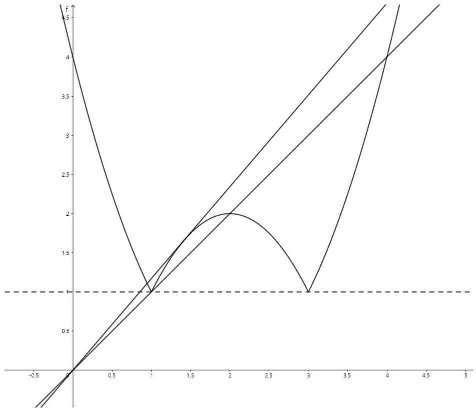
2021학년도 논술고사

자연계열 (저녁, 의학과 제외) 모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 6

[문제 1-1]

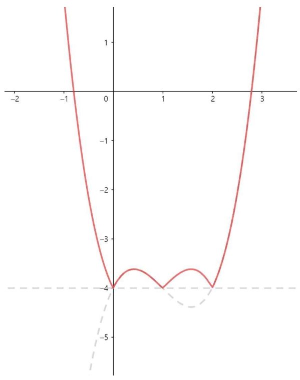
(1) $y=f(x)$와 $y=kx$가 세 점에서 만나려면 아래 그림과 같이, $y=kx$가 $(1,1)$을 지나거나 $y=kx$가 $y=f(x)$와 접해야 한다. $y=kx$가 $(1,1)$을 지나는 경우 $k=1$이다.



$y=kx$와 $y=f(x)$가 $x=a$에서 접하는 경우를 생각하면, $1 \le a \le 3$가 되고, $f(x)=2-(x-2)^2$가 되므로 $f'(a)=-2(a-2)$이다. 따라서 $k=-2(a-2)$가 되어 접점의 y좌표는 $-2a(a-2)$이다. 한편 접점의 y좌표는 $f(a)$이므로, $-2a(a-2)=2-(a-2)^2$가 성립한다. 이를 정리하면, $a^2=2$이고 $1 \le a \le 3$이므로 $a=\sqrt{2}$이다. 따라서 $k=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$이다.

따라서 가능한 k는 $k=1, 4-2\sqrt{2}$이다.

(2) $f'(x)=3x^2-6x+2$이고 $f''(x)=6x-6$이므로, 변곡점의 좌표는 $(1,-4)$이다. 따라서 $g(x)$는 $x^3-3x^2+2x-4=-4$의 세 근 $x=0,1,2$에서 극솟값을 가진다. 또한, $f'(x)=3x^2-6x+2=0$의 두 근 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 가지므로, $p=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $q=0,1,2$ 이다.

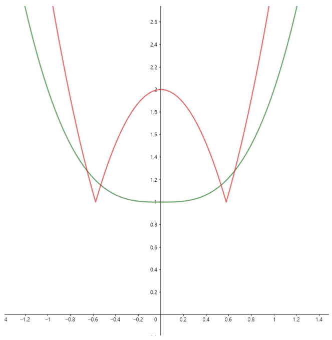


(3) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올렸더니 미분가능한 함수의 그래프가 되었으므로, $f(a)=1$인 모든 a에 대하여, $f'(a)=0$이어야 한다. 그런데 $x=a$에서 함수가 극댓값을 가지거나 극솟값을 가지면, 삼차함수 그래프의 개형으로부터 $g(x)$가 미분 불가능한 점이 항상 존재한다. 따라서 $x=a$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 가지므로 $f(x)=(x-a)^3+1$이다.

교점을 구하기 위해서 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동 시켜 생각하면 $a=0$일 때만 구하면 충분하다. $g(x)=|x|^3+1$과 $h(x)=|3x^2-1|+1$은 둘 다 y축 대칭이므로, $x>0$일 때의 교점의 개수를 구하면 된다.

① $x<\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g(x)$는 증가하고 $h(x)$는 감소한다. $g(0)-h(0)<0$이고 $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$이므로 $g(x)-h(x)=0$이 되는 점이 하나 존재하므로, $g(x)$와 $h(x)$는 한 점에서 만난다.

② $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$, $g(1)-h(1)<0$, $g(3)-h(3)>0$ 이므로, 사잇값 정리에 의해 한 근은 구간 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},1\right)$에, 다른 근은 구간 $(1,3)$에 존재한다. 두 근 모두 $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로, 두 점에서 만난다. 그래프 $g(x)$와 $h(x)$의 개형으로부터, $x>0$인 근은 두 개 뿐이다.



따라서 $x>0$에서 교점은 세 개이고, 대칭성에 의해 모두 6개의 교점이 있다.

(4) $y=a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$는 원점 대칭인 함수이므로 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다. 즉, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx$이고, 구간 $[0,\,1]$에서 $\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)\geq 0$이므로, $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx$이다. 한편,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx &= \int_0^1\left(\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right)\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^1+\frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1\\ &= \frac{2}{\pi}(1-\ln 2)\end{aligned}$$

이므로, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2a\cdot\frac{2}{\pi}(1-\ln 2)=\frac{4}{\pi}$ 이고, $a=\frac{1}{1-\ln 2}$이다.

[문제 1-2]

(1) 먼저, S_0, S_1의 원소의 개수가 각각 1, 2이다. 또한 $k \geq 2$에 대하여 S_k는 S_{k-2}와 $\{x \mid |f(x)| = k\}$의 합집합이고 그래프의 개형으로부터 S_k의 원소의 개수는 $k+1$ 임을 알 수 있다. S_k의 원소 s에 대하여 $14-s$도 S_k의 원소이므로 원소의 합은 $7k$이다. 따라서 $a = 1+2 \cdot 5 = 11$이며, $b = 7a = 77$이다.

(2) 먼저 $S_0 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$이고, $\ln 3x = \pm 1$으로부터 $S_1 = \left\{\frac{e}{3}, \frac{e^{-1}}{3}\right\}$이다. 따라서 $p_0 = \frac{1}{3}$이고 $p_1 = \frac{1}{9}$이다.
$n \geq 2$일 때 그래프의 개형으로부터 $S_n = S_{n-2} \cup \{x \mid \ln 3x = \pm n\} = S_{n-2} \cup \left\{\frac{e^n}{3}, \frac{e^{-n}}{3}\right\}$가 되므로 $p_n = p_{n-2} \times \frac{1}{9}$이다. 따라서 $p_n = \frac{1}{3} p_{n-1}$이 되고, 구하고자 하는 값은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수와 같으므로 값은 $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ 이다.

[문제 2-1]

(1) 검은 바둑돌이 k번째 시행에서 규칙 ⓒ에 의해 버려질 확률을 구하자.

$k=1$: 처음 시행에서 규칙 ⓒ의 경우가 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$k=2$: 처음 두 시행에서 ⓛ-ⓒ이 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$이다.

$k=3$: 세 번의 시행동안 가능한 경우는 ⓛ-ⓛ-ⓒ 혹은 ㉠-ⓛ-ⓒ 의 경우이므로 구하는 확률은 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$이다.

따라서 검은 바둑돌이 3회 시행 직후 수직선에 남아 있지 않을 확률은 $p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$이고, $\log p=\log 2+\log 7-3\log 3=0.30+0.84-1.41=-0.27$이다.

(2) $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$와 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 각각 구하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 먼저 계산하자. 사건 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$은 12회 시행하는 동안 $2k$번째 시행 직후 $(k=1,2,\ldots,6)$ 검은 바둑돌은 $x=1$의 위치에 있어야 한다. 처음 검은 바둑돌의 위치는 원점이므로 두 번째 시행 직후에 검은 바둑돌이 $x=1$의 위치에 있기 위해서는 시행된 규칙은 ㉠-㉠의 경우, ㉠-ⓒ의 경우, ⓛ-㉠의 경우로 총 3가지 경우가 있다. 이제 두 번의 시행을 더 했을 때 여전히 $x=1$의 위치에 있으려면 차례로 시행된 규칙은 아래의 5가지 중 하나이다.

㉠-㉠, ㉠-ⓒ, ⓛ-㉠, ⓒ-㉠, ⓒ-ⓒ

따라서 12회의 시행을 마치기까지 이렇게 5번을 시행해야 하므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$이다.

이제 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$를 구하자. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)$을 구하면 된다.

바둑돌이 $2k+1$ 번째 혹은 $2k+2$ 번째에서 버려지는 확률을 구하자.

$k=0$일 때 : 첫 번째 혹은 두 번째 시행에서 버려져야 하므로, 첫 시행에서 규칙 ⓒ의 경우이거나 두 번째 시행까지 차례로 ⓛ-ⓒ의 경우가 된다. 따라서 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$이다.

$k>0$일 때 : $2k$번째 까지는 검은 바둑돌이 남아 있어야 하므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 구하는 같이 구할 수 있으므로 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이고, $2k+1$ 혹은 $2k+2$번째에서 버려지는 경우는 규칙 ⓛ-ⓒ이 차례대로 나오는 경우 밖에 없으므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이다.

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$이다. 이제 $\frac{5^5}{9^5}=\alpha$라 하고, 조건부 확률을 구하면

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)}=\frac{\frac{\alpha}{3}}{\frac{\alpha}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}(1-\alpha)}=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}\text{이다.}$$

한편, $359\alpha<19$ 이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}<\frac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha}=\frac{3}{92}$이다.

(3) 총 27 가지의 경우 중 각 X에 대하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

$X=0$인 경우 : ⓒ - ⓒ - *, ⓒ - ⓛ - ⓒ, ⓛ - ⓒ - ⓒ 으로 모두 5가지.

$X=2$인 경우 : ㉠ - ㉠ - ⓒ, ⓒ이 나오지 않는 경우로 총 $1+8=9$가지.

$X=1$인 경우 : 나머지 27개에 대한 나머지 경우 13가지

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{27}+1\times\frac{13}{27}+2\times\frac{9}{27}=\frac{31}{27}$이다.

분산을 구해보면 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{49}{27}-\frac{31^2}{27^2}=\frac{7^2\times3^3-31^2}{27^2}$이다.

따라서 $\sigma(X)=\frac{\sqrt{362}}{27}$ 이다.

[문제 2-2]

(1) 홀수가 m번 (단, $2m \le n$) 나온다고 하면 흰 바둑돌의 위치는 $k=n-2m$ 이며, 홀수가 $n-m$ 번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $-k$이다. $\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n}(-k)^2 p_{-k}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(p_k+p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n}(n-2m)^2 \frac{{}_n\mathrm{C}_m}{2^n}$$

한편, n번의 시행에서 주사위의 눈의 수가 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$를 따르므로 이항분포의 평균과 분산으로부터 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{2} = 0 \times {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \times {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n \times {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{n}{4} = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 0^2 \times {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^2 \times {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n^2 \times {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

이로부터 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{n^2+n}{4}$ 임을 확인 할 수 있다.

$$(\text{준식}) = n^2 - 4n\mathrm{E}(X) + 4\mathrm{E}(X^2) = n^2 - 2n^2 + n + n^2 = n \text{ 이다.}$$

(2) 검은 바둑돌은 원점 혹은 $x=1$위에 있어야 하고 최대 3개까지 있을 수 있다. 원점의 검은 바둑돌의 개수를 a, $x=1$위의 검은 바둑돌의 개수를 b라고 하면 가능한 (a, b)는 $a+b \le 3$이 되는 음이 아닌 정수의 순서쌍이 되므로, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$으로 모두 10개이다. 또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다.

한편 검은 바둑돌이 규칙 ㉠을 따라 움직이는 사건을 A라 하고 흰 바둑돌이 규칙 Ⓐ을 따라 움직이는 사건을 B라 하면, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$이므로 두 사건은 독립이다.

비슷하게 하면, 검은 바둑돌의 규칙 중 ㉠, ㉡, ㉢ 하나가 일어나는 사건과 흰 바둑돌의 규칙 중 Ⓐ와 Ⓑ가 일어나는 사건은 독립이다. 따라서 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 움직임은 서로 독립적이므로 전체 경우의 수는 $10(n+1)$가지이다.

(3) 먼저 흰 바둑돌의 위치는 주사위의 눈의 순서에 상관없이 그 횟수에 의해서만 결정되므로 조건 ①에 의해 12회 시행 직후에 흰 바둑돌은 원점에 있고 조건 ②에 의하여 x_{13}은 $2, 4, 6$중에 하나가 되어야 한다. 조건 ①로부터 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉠, ㉡, ㉢의 경우가 각각 네 번씩 일어났다는 것을 알 수 있고, 13회 시행까지 검은 바둑돌이 버려지지 않고 모두 남아 있으므로 규칙 ㉢의 경우가 되는 시행의 직전에 원점에 검은 바둑돌이 있으면 안된다. 따라서 ㉢이 시행되기 전에 검은 바둑돌 4개를 $x=1$의 위치로 옮기는 시행 (㉠)이 모두 일어나야 한다. 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉡이 ㉢과 ㉠ 사이에 일어나게 되면 검은 바둑돌을 버리게 되므로, 12회까지 가능한 경우는 아래 두 가지 중 하나이다.

(i) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡

검은 바둑돌 1개가 12회 시행 직후에 원점의 위치에 있으므로, ㉠의 경우가 일어나는 $x_{13}=4$ 이다.

(ii) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢

검은 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있으므로, ㉠, ㉢의 경우가 일어나는 $x_{13}=4$ 또는 $x_{13}=6$이다.

즉 ㉠의 자리에는 1,1,4,4, ㉡ 의 자리에는 2, 2, 5, 5, ㉢의 자리에는 3, 3, 6, 6이 있어야 한다. a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 개수는 6이므로, 각 경우 6^3가지이고, 구하고자 하는 답은 $3 \cdot 6^3 = 648$ 이다.

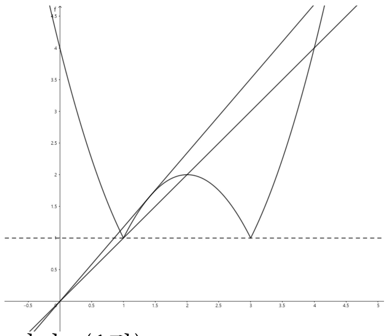
2021학년도 논술고사

자연계열 (저녁, 의학과 제외) 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 :

[문제 1-1] (35점)

(1) (8점) $y=f(x)$와 $y=kx$가 세 점에서 만나려면 아래 그림과 같이, $y=kx$가 $(1,1)$을 지나거나 $y=kx$가 $y=f(x)$와 접해야 한다. (3점)



$y=kx$가 $(1,1)$을 지나는 경우 $k=1$이다. (1점)

$y=kx$와 $y=f(x)$가 $x=a$에서 접하는 경우를 생각하면, $1 \le a \le 3$가 되고, $f(x)=2-(x-2)^2$가 되므로 $f'(a)=-2(a-2)$이다. 따라서 $k=-2(a-2)$가 되어 접점의 y좌표는 $-2a(a-2)$이다. 한편 접점의 y좌표는 $f(a)$이므로, $-2a(a-2)=2-(a-2)^2$가 성립한다. 이를 정리하면, $a^2=2$이고 $1 \le a \le 3$이므로 $a=\sqrt{2}$이다. 따라서 $k=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$이다. (4점)
따라서 가능한 k는 $k=1, 4-2\sqrt{2}$이다.

(2) (7점) $f'(x)=3x^2-6x+2$이고 $f''(x)=6x-6$이므로, 변곡점의 좌표는 $(1,-4)$이다. (2점)

따라서 $g(x)$는$x^3-3x^2+2x-4=-4$의 세 근 $x=0,1,2$에서 극솟값을 가진다. (2점)

또한, $f'(x)=3x^2-6x+2=0$의 두 근 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 가지므로 (3점)

$p=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $q=0,1,2$ 이다.

(3) (10점) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올렸더니 미분가능한 함수의 그래프가 되었으므로, $f(a)=1$인 모든 a에 대하여, $f'(a)=0$이어야 한다. 그런데 $x=a$에서 함수가 극댓값을 가지거나 극솟값을 가지면, 삼차함수 그래프의 개형으로부터 $g(x)$가 미분 불가능한 점이 항상 존재한다. 따라서 $x=a$에서 함수 $f(x)$는 변곡점을 가지므로 $f(x)=(x-a)^3+1$이다. (4점)

교점을 구하기 위해서 x축 방향으로 $-a$만큼 평행이동 시켜 생각하면 $a=0$일 때만 구하면 충분하다. $g(x)=|x|^3+1$과 $h(x)=|3x^2-1|+1$은 둘 다 y축 대칭이므로, $x>0$일 때의 교점의 개수를 구하면 된다.

① $x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g(x)$는 증가하고 $h(x)$는 감소한다. $g(0)-h(0)<0$이고 $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$이므로 $g(x)-h(x)=0$이 되는 점이 하나 존재하므로, $g(x)$와 $h(x)$는 한 점에서 만난다. (2점)

② $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$일 때: $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)-h\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$, $g(1)-h(1)<0$, $g(3)-h(3)>0$ 이므로, 사잇값 정리에 의해 한 근은 구간 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},1\right)$에, 다른 근은 구간 $(1,3)$에 존재한다. 두 근 모두 $x>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이므로, 두 점에서 만난다. 그래프 $g(x)$와 $h(x)$의 개형으로부터, $x>0$인 근은 두 개 뿐이다. (2점)
따라서 $x>0$에서 교점은 세 개이고, 대칭성에 의해 모두 6개의 교점이 있다. (2점)

(4) (10점) $y=a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$는 원점 대칭인 함수이므로 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다. 즉, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$이고, 구간 $[0,\,1]$에서 $\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right) \geq 0$이므로, $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx$이다. 한편,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx &= \int_0^1 \left(\sec^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)-1\right)\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\tan^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^1 + \frac{4}{\pi}\left[\ln\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\right]_0^1 \quad (5\text{점}) \\ &= \frac{2}{\pi}(1-\ln 2)\end{aligned}$$

이므로, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2a \cdot \frac{2}{\pi}(1-\ln 2) = \frac{4}{\pi}$ 이고, $a=\frac{1}{1-\ln 2}$이다. (5점)

[문제 1-2] (15점)

(1) (6점) 먼저, S_0, S_1의 원소의 개수가 각각 1, 2이다. 또한 $k \geq 2$에 대하여 S_k는 S_{k-2}와 $\{x \mid |f(x)| = k\}$의 합집합이고 그래프의 개형으로부터 S_k의 원소의 개수는 $k+1$ 임을 알 수 있다. S_k의 원소 s에 대하여 $14-s$도 S_k의 원소이므로 원소의 합은 $7k$이다. 따라서

$a = 1 + 2 \cdot 5 = 11$ (3점)

$b = 7a = 77$ (3점)

(2) (9점) 먼저 $S_0 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$이고, $\ln 3x = \pm 1$으로부터 $S_1 = \left\{\frac{e}{3}, \frac{e^{-1}}{3}\right\}$이다. 따라서 $p_0 = \frac{1}{3}$이고 $p_1 = \frac{1}{9}$이다.

$n \geq 2$일 때 그래프의 개형으로부터 $S_n = S_{n-2} \cup \{x \mid \ln 3x = \pm n\} = S_{n-2} \cup \left\{\frac{e^n}{3}, \frac{e^{-n}}{3}\right\}$가 되므로

$p_n = p_{n-2} \times \frac{1}{9}$이다. (4점)

따라서 $p_n = \frac{1}{3} p_{n-1}$이 되고, 구하고자 하는 값은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수와 같으므로 (3점)

구하고자 하는 값은 $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ 이다. (2점)

[문제 2-1] (24점)

(1) (6점) 검은 바둑돌이 k번째 시행에서 규칙 ㉢에 의해 버려질 확률을 구하자.

$k=1$: 처음 시행에서 규칙 ㉢의 경우가 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

$k=2$: 처음 두 시행에서 ㉡-㉢이 나와야 하므로 구하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$이다.

$k=3$: 세 번의 시행동안 가능한 경우는 ㉡-㉡-㉢ 혹은 ㉠-㉡-㉢ 의 경우이므로 구하는 확률은 $2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$이다.(3점)

따라서 검은 바둑돌이 3회 시행 직후 수직선에 남아 있지 않을 확률은 $p=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}=\frac{14}{27}$이고, (1점)

$\log p=\log 2+\log 7-3\log 3=0.30+0.84-1.41=-0.27$이다. (2점)

(2) (10점) $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A})=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$와 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 각각 구하자.

$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 먼저 계산하자. 사건 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$은 12회 시행하는 동안 $2k$번째 시행 직후 $(k=1,2,\ldots,6)$ 검은 바둑돌은 $x=1$의 위치에 있어야 한다.

처음 검은 바둑돌의 위치는 원점이므로 두 번째 시행 직후에 검은 바둑돌이 $x=1$의 위치에 있기 위해서는 시행된 규칙은 ㉠-㉠의 경우, ㉠-㉢의 경우, ㉡-㉠의 경우로 총 3가지 경우가 있다. 이제 두 번의 시행을 더 했을 때 여전히 $x=1$의 위치에 있으려면 차례로 시행된 규칙은 아래의 5가지 중 하나이다.

㉠-㉠, ㉠-㉢, ㉡-㉠, ㉢-㉠, ㉢-㉢

따라서 12회의 시행을 마치기까지 이렇게 5번을 시행해야 하므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{3}{9}\times\left(\frac{5}{9}\right)^5$이다. (3점)

이제 $\mathrm{P}(\mathrm{A})$를 구하자. $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)$을 구하면 된다.

바둑돌이 $2k+1$ 번째 혹은 $2k+2$ 번째에서 버려지는 확률을 구하자.

$k=0$일 때 : 첫 번째 혹은 두 번째 시행에서 버려져야 하므로, 첫 시행에서 규칙 ㉢의 경우이거나 두 번째 시행까지 차례로 ㉡-㉢의 경우가 된다. 따라서 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$이다.

$k>0$일 때 : $2k$번째 까지는 검은 바둑돌이 남아 있어야 하므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$를 구하는 같이 구할 수 있으므로 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이고, $2k+1$ 혹은 $2k+2$번째에서 버려지는 경우는 규칙 ㉡-㉢이 차례대로 나오는 경우 밖에 없으므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{27}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}$이다.

즉, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)=\frac{4}{9}+\frac{1}{27}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{5}{9}\right)^{k-1}=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{5^5}{9^5}\right)$이다. (3점)

이제 $\frac{5^5}{9^5}=\alpha$라 하고, 조건부 확률을 구하면

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}=\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)}=\frac{\frac{\alpha}{3}}{\frac{\alpha}{3}+\frac{4}{9}+\frac{1}{12}(1-\alpha)}=\frac{12\alpha}{9\alpha+19}$$ 이다. (2점)

한편, $359\alpha < 19$ 이므로, $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \dfrac{12\alpha}{9\alpha+19} < \dfrac{12\alpha}{9\alpha+359\alpha} = \dfrac{3}{92}$ 이다. (2점)

(3) (8점) 총 27 가지의 경우 중 각 X에 대하여 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

$X=0$인 경우 : ㉢ - ㉢ - *, ㉢ - ㉡ - ㉢, ㉡ - ㉢ - ㉢ 으로 모두 5가지. (1점)

$X=2$인 경우 : ㉠ - ㉠ - ㉢, ㉢이 나오지 않는 경우로 총 $1+8=9$가지. (1점)

$X=1$인 경우 : 나머지 27개에 대한 나머지 경우 13가지 (1점)

따라서 $\mathrm{E}(X) = 0 \times \dfrac{5}{27} + 1 \times \dfrac{13}{27} + 2 \times \dfrac{9}{27} = \dfrac{31}{27}$ 이다. (2점)

분산을 구해보면 $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \dfrac{49}{27} - \dfrac{31^2}{27^2} = \dfrac{7^2 \times 3^3 - 31^2}{27^2}$ 이다.

따라서 $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{362}}{27}$ 이다. (3점)

[문제 2-2] (26점)

(1) (8점) 홀수가 m번 (단, $2m \le n$) 나온다고 하면 흰 바둑돌의 위치는 $k = n - 2m$ 이며, 홀수가 $n-m$번 나오면 흰 바둑돌의 위치는 $-k$이다. (2점)

$\sum_{k=1}^{n} k^2 (p_k + p_{-k}) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k + \sum_{k=1}^{n} (-k)^2 p_{-k}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n} k^2 (p_k + p_{-k}) = \sum_{m=0}^{n} (n-2m)^2 \frac{{}_n\mathrm{C}_m}{2^n}$ (2점)

한편, n번의 시행에서 주사위의 눈의 수가 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$를 따르므로 이항분포의 평균과 분산으로부터 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$를 구하면 다음과 같다. (2점)

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{2} = 0 \times {}_n\mathrm{C}_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \times {}_n\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n \times {}_n\mathrm{C}_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\mathrm{V}(X) = \frac{n}{4} = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 0^2 \times {}_n\mathrm{C}_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1^2 \times {}_n\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots + n^2 \times {}_n\mathrm{C}_n \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

이로부터 $\mathrm{E}(X^2) = \frac{n^2+n}{4}$ 임을 확인 할 수 있다.

$$(\text{준식}) = n^2 - 4n\mathrm{E}(X) + 4\mathrm{E}(X^2) = n^2 - 2n^2 + n + n^2 = n \ \ (2\text{점})$$

(2) (8점) 검은 바둑돌은 원점 혹은 $x=1$위에 있어야 하고 최대 3개까지 있을 수 있다. 원점의 검은 바둑돌의 개수를 a, $x=1$위의 검은 바둑돌의 개수를 b라고 하면 가능한 (a, b)는 $a+b \le 3$이 되는 음이 아닌 정수의 순서쌍이 되므로, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$으로 모두 10개이다. 또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다. (3점)

또한 흰 바둑돌 배치의 경우의 수는 $n+1$이다. (2점)

한편 검은 바둑돌이 규칙 ㉠을 따라 움직이는 사건을 A라 하고 흰 바둑돌이 규칙 Ⓐ을 따라 움직이는 사건을 B라 하면, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$이므로 두 사건은 독립이다.

비슷하게 하면, 검은 바둑돌의 규칙 중 ㉠, ㉡, ㉢ 하나가 일어나는 사건과 흰 바둑돌의 규칙 중 Ⓐ와 Ⓑ가 일어나는 사건은 독립이다. 따라서 검은 바둑돌과 흰 바둑돌의 움직임은 서로 독립적이므로 전체 경우의 수는 $10(n+1)$가지이다. (3점)

(3) (10점) 먼저 흰 바둑돌의 위치는 주사위의 눈의 순서에 상관없이 그 횟수에 의해서만 결정되므로 조건 ①에 의해 12회 시행 직후에 흰 바둑돌은 원점에 있고 조건 ②에 의하여 x_{13}은 $2, 4, 6$중에 하나가 되어야 한다. (1점)

조건 ①로부터 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉠, ㉡, ㉢의 경우가 각각 네 번씩 일어났다는 것을 알 수 있고, 13회 시행까지 검은 바둑돌이 버려지지 않고 모두 남아 있으므로 규칙 ㉢의 경우가 되는 시행의 직전에 원점에 검은 바둑돌이 있으면 안된다. 따라서 ㉢이 시행되기 전에 검은 바둑돌 4개를 $x=1$의 위치로 옮기는 시행 (㉠)이 모두 일어나야 한다. 12회 시행을 하는 동안 규칙 ㉡이 ㉢과 ㉠ 사이에 일어나게 되면 검은 바둑돌을 버리게 되므로, 12회까지 가능한 경우는 아래 두 가지 중 하나이다.

(i) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉡ (3점)

검은 바둑돌 1개가 12회 시행 직후에 원점의 위치에 있으므로, ㉠의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 이다.

(ii) ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉡ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉠ - ㉢ - ㉢ - ㉢ - ㉢ (3점)

검은 바둑돌이 모두 $x=1$의 위치에 있으므로, ㉠, ㉢의 경우가 일어나는 $x_{13} = 4$ 또는 $x_{13} = 6$이다.

즉 ㉠의 자리에는 $1,1,4,4$, ㉡ 의 자리에는 $2,\ 2,\ 5,\ 5$, ㉢의 자리에는 $3,\ 3,\ 6,\ 6$이 있어야 한다.
$a,\ a,\ b,\ b$를 일렬로 나열하는 순열의 개수는 6이므로, 각 경우 6^3가지이고, (2점)
구하고자 하는 답은 $3\cdot 6^3 = 648$ 이다. (1점)