자연계열(저녁, 의학과 제외)

2021학년도 논술고사

자연계열
(저녁, 의학과 제외)

성 명	
전 형	
수험번호	

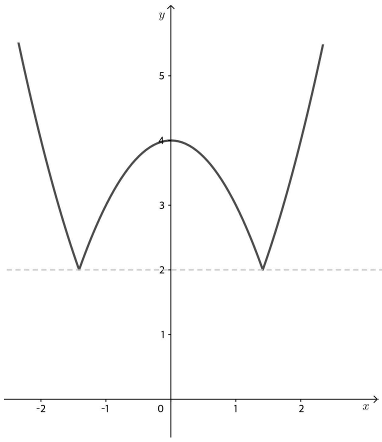
표지를 제외한 페이지 수 : 4

2021학년도 자연계열(저녁) 논술고사

자연계열(저녁)
(의학과 제외)

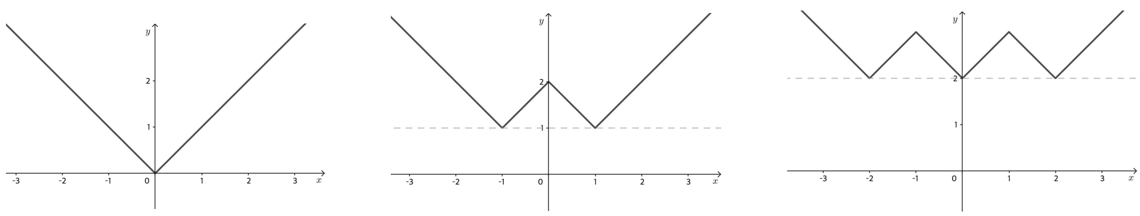
[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 함수 $f(x)$에 대하여 $y=|f(x)|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동하여 그릴 수 있다. 이것은 $y=0$에서 $y=f(x)$의 그래프를 접어 올려 그린 것으로 볼 수 있다. 일반적으로, 실수 b에 대하여, $y=|f(x)-b|+b$ 의 그래프는 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하여 x축 아래에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭이동하고 다시 y축의 방향으로 b만큼 평행이동하여 그릴 수 있는데, 이 또한 $y=b$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 접어 올려 그린 것으로 볼 수 있다. 이러한 이유로, 함수 $y=|f(x)-b|+b$ 를 $y=b$에서 $y=f(x)$를 '접어 올린 함수'라 하자. [그림 1-1]은 $y=2$에서 $y=x^2$을 접어 올린 함수의 그래프이다.



[그림 1-1]

(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 음이 아닌 정수 n에 대하여 $y=0,\ \dots,\ y=n$에서 차례로 연이어 접어 올린 함수의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점의 x 좌표의 집합을 S_n이라 하자. 예를 들어, $f(x)=x$ 이면, $y=0$, $y=1$, $y=2$에서 순서대로 접어 올린 함수의 그래프는 [그림 1-2]와 같으므로 $S_0=\{0\}$, $S_1=\{-1,1\}$, $S_2=\{-2,0,2\}$이다.



[그림 1-2]

[문제 1-1] (35점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$는 이차함수 $y=(x-2)^2$을 $y=1$에서 접어 올린 함수이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 정확히 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값을 모두 구하여라.

(2) 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x-4$의 그래프의 변곡점 (a,b)를 생각하자. 함수 $g(x)$는 $y=f(x)$를 $y=b$에서 접어 올린 함수이다. 함수 $g(x)$가 $x=p$에서 극대가 되고 $x=q$에서 극소가 되도록 하는 모든 p와 q의 값을 구하여라.

(3) 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$를 $y=1$에서 접어 올린 함수이고, 함수 $h(x)$는 $y=f'(x)$를 $y=1$에서 접어 올린 함수이다. $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능 할 때, 두 곡선 $y=g(x)$와 $y=h(x)$의 교점의 개수를 구하여라.

(4) 양의 실수 a에 대하여, 함수 $f(x)$는 $y=a\tan^3\left(\frac{\pi x}{4}\right)$를 $y=0$에서 접어 올린 함수이다. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\frac{4}{\pi}$일 때 a의 값을 구하여라.

[문제 1-2] (15점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $f(x)=(x-7)^2$에 대하여 집합 S_{10}의 원소의 개수를 a라 하고 S_{10}의 모든 원소의 합을 b라 하자. a와 b의 값을 각각 구하여라.

(2) $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\ln 3x$와 음이 아닌 정수 n에 대하여 S_n의 모든 원소의 곱을 p_n이라 할 때, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$을 구하여라.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 검은 바둑돌을 이동시키거나 버리는 것을 1회의 시행이라 하자.

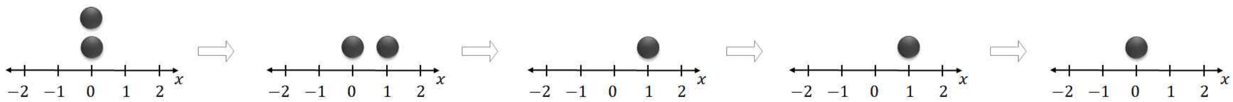
<검은 바둑돌의 규칙>

㉠ 눈의 수가 1 또는 4이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 $x=1$의 위치로 이동시킨다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉡ 눈의 수가 2 또는 5이면, $x=1$의 위치에 있는 검은 바둑돌 1개를 원점으로 이동시킨다. $x=1$의 위치에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

㉢ 눈의 수가 3 또는 6이면, 원점에 있는 검은 바둑돌 1개를 버린다. 원점에 검은 바둑돌이 없다면 아무 일도 하지 않는다.

예를 들어, 검은 바둑돌 2개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 순서대로 시행한 규칙은 ㉠-㉢-㉠-㉡이 되어 검은 바둑돌의 배치는 [그림 2-1]과 같이 변한다.



[그림 2-1]

(나) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 b개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수를 확인하고 검은 바둑돌을 제시문 (가)의 <검은 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키거나 버리고, 흰 바둑돌을 <흰 바둑돌의 규칙>에 따라 이동시키는 것을 1회의 시행이라 하자.

<흰 바둑돌의 규칙>

Ⓐ 눈의 수가 짝수이면 흰 바둑돌을 양의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.
Ⓑ 눈의 수가 홀수이면 흰 바둑돌을 음의 방향으로 1 만큼 이동시킨다.

예를 들어 검은 바둑돌 2개, 흰 바둑돌 1개가 원점에 놓여 있고 4회 시행을 하는 동안 주사위 눈의 수가 순서대로 1, 6, 4, 2가 나왔다면, 검은 바둑돌 1개가 원점에 있고 흰 바둑돌은 $x=2$의 위치에 있다.

[문제 2-1] (24점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 3회 시행 직후 검은 바둑돌이 수직선 위에 남아 있지 않을 확률을 p 라 할 때, $\log p$의 값을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.47$, $\log 7 = 0.84$로 계산한다.)

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 1개가 놓여 있다. 12회 시행을 하였을 때, 2, 4, 6, 8, 10, 12번째 시행 직후마다 검은 바둑돌이 원점에 있지 않는 사건을 A라 하고, 12번째 시행 직후 수직선 위에 검은 바둑돌이 남아 있는 사건을 B라 하자. 이때 $\mathrm{P}(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) < \dfrac{3}{92}$임을 증명하여라. (단, $\left(\dfrac{5}{9}\right)^5 < \dfrac{19}{359}$를 증명 없이 이용할 수 있다.)

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 2개가 놓여 있고 3회 시행을 하였다. 수직선 위에 남아 있는 검은 바둑돌의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$와 표준편차 $\sigma(X)$를 구하여라.

[문제 2-2] (26점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 수직선의 원점에 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 양의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 흰 바둑돌이 $x = k$의 위치에 있을 확률을 p_k라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 (p_k + p_{-k})$의 값을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있다. 3 이상의 정수 n에 대하여 n회 시행 직후 바둑돌 배치로 가능한 경우의 수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(3) 수직선의 원점에 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌 1개가 놓여 있고, 13회 시행을 하여 나온 주사위의 눈의 수를 순서대로 $x_1, \dots, x_{13}$ 이라 하자. 다음 <조건>을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \dots, x_{13})$ 의 개수를 구하여라.

< 조 건 >

① 첫 12회 시행을 하는 동안 모든 주사위의 눈이 정확히 두 번씩 나왔다.
② 13번째 시행을 마친 직후에는 검은 바둑돌 4개와 흰 바둑돌이 모두 $x = 1$의 위치에 있다.