2021학년도 논술고사

자연계열(오후) 모범답안

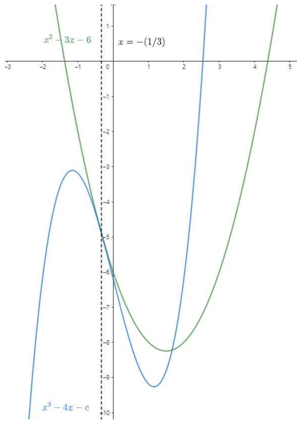
표지를 제외한 페이지 수 : 6

2021학년도 자연계열(오후) 모범답안

[문제 1-1]

(1) 두 함수 $f(x)=x^2-3x-6$과 $g(x)=x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^2-3a-6=a^3-4a+c$ 이고 $2a-3=3a^2-4$이다.

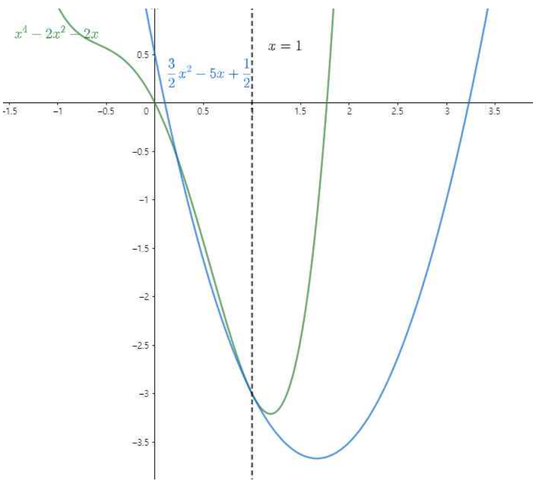
이를 풀면 $2a-3=3a^2-4$로부터, $3a^2-2a-1=(3a+1)(a-1)=0$ 이 되고 a는 정수가 아니므로 $a=-\dfrac{1}{3}$이다. 이제 $a^2-3a-6=a^3-4a+c$에 $a=-\dfrac{1}{3}$을 대입하면 $\dfrac{1}{9}+1-6=-\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{3}+c$이므로 $27c=-167$이다.



(2) $f(x)=x^4-2x^2-2x$과 $g(x)=\dfrac{3}{2}x^2-5x+\dfrac{1}{2}$이 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^4-2a^2-2a=\dfrac{3}{2}a^2-5a+\dfrac{1}{2}$이고 $4a^3-4a-2=3a-5$이다.

이를 풀면 $4a^3-4a-2=3a-5$로부터, $4a^3-7a+3=(a-1)(2a-1)(2a+3)=0$이고 따라서 가능한 a의 값은 1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{3}{2}$ 이다. 이 중 $a^4-2a^2-2a=\dfrac{3}{2}a^2-5a+\dfrac{1}{2}$을 만족하는 것을 찾으면 $a=1$ 이다. 따라서 $h(x)$는 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=1$에서 갈아타는 함수이고, 주어진 식을 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^2 h(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx &= \left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-x^2\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)+\left(4-10+1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{149}{30}\end{aligned}$$



[문제 1-2]

(1) 양의 정수 n에 대해, $y=2^x$와 $x=n$에서 부드럽게 만나는 직선의 방정식은 $x=n$에서의 접선이다. $f'(n)=2^n\ln 2$이고 점 $(n, 2^n)$을 지나므로 접선의 방정식은 $y-2^n=2^n\ln 2(x-n)$가 되어 $a_n=\ln 2\,(e^{n\ln 2})=2^n\ln 2$ 이고, $b_n=2^n-n2^n\ln 2$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{\ln 2}-n\right)=\frac{100}{\ln 2}-5050$ 이다.

(2) $g(x)=px^2+qx+r$이라 하자. $g(0)=f(0)$로부터 $r=1$이고 $g'(0)=f'(0)$로부터 $q=1$이다. $g(2)=f(2)$로부터 $p=\frac{e^2-3}{4}$이므로 $g(x)=\frac{e^2-3}{4}x^2+x+1$이다.

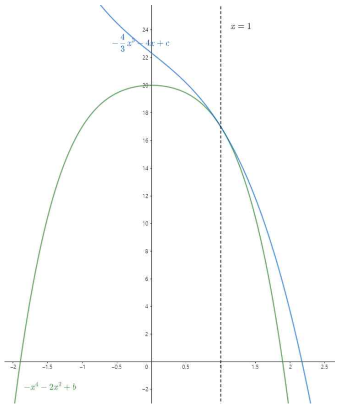
함수 $f(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^2$이고, 함수 $g(x)$위의 점 P에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=e^2-2$이고, θ는 예각이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta=\frac{e^2-(e^2-2)}{1+e^2(e^2-2)}=\frac{2}{(e^2-1)^2}$$

이다.

[문제 1-3]

(1) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + b$와 $g(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 4x + c$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a) = g(a)$이고 $f'(a) = g'(a)$이다. 즉, $-4a^3 - 4a = -4a^2 - 4$로부터, $4(a^2+1)(a-1) = 0$이므로 $a = 1$이다. 한편, $g(x)$는 $x \geq 1$에서 감소하므로 $h(x)$의 최댓값은 구간 $(-\infty, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값과 같고, 따라서 $f(x)$의 극댓값 혹은 $f(1)$에서 최댓값을 가진다. $f'(x) = -4(x^2+1)x = 0$의 실수해는 $x = 0$이므로 $f(0)$와 $f(1)$의 값을 비교하면 $f(0) = b$이고 $f(1) = b - 6$이므로 b 최댓값이다. 즉, $b = 20$이다. $f(1) = g(1)$로부터, $-3 + b = -\frac{16}{3} + c$이고 $c = 17 + \frac{16}{3}$이다. 따라서 $3(a+b+c) = 3\left(1 + 20 + 17 + \frac{16}{3}\right) = 130$ 이다.

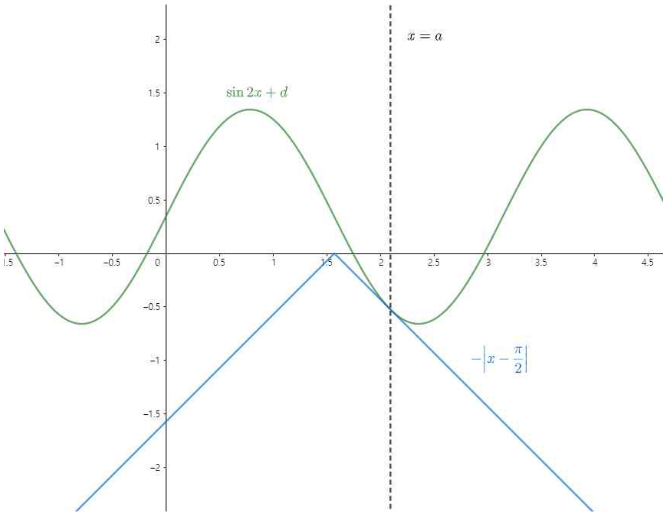


(2) 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로, $f(a) = g(a)$이고 $a \neq \frac{\pi}{2}$이며, $f'(a) = g'(a)$이다. $f(a) = g(a)$로부터, $d = -\sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right|$가 된다. $f(x)$에서 $g(x)$로 $x = a$에서 갈아타는 함수의 최댓값 M은 $d+1$ 혹은 0이다. 따라서 $1 + d > 0$인 d의 존재여부와 존재하는 경우 그 최댓값을 살펴보면 된다.

$\left|a - \frac{\pi}{2}\right| \geq 2$이면 $1 + d = 1 - \sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right| \leq 0$ 이므로 $\left|a - \frac{\pi}{2}\right| < 2$이라 가정하자. 먼저 $a \leq \frac{\pi}{2}$라 하자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = 1$이므로 $a = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ (단, k는 정수) 꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{\pi}{6}$뿐이다. 이때 $d + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left|\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right| + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + 1 < 0$ 이다.

$a > \frac{\pi}{2}$인 경우를 살펴보자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = -1$이므로 $a = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ (단, k는 정수) 꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{2\pi}{3}$ 뿐이다. 이때 $d + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + 1 > 0$이다.

따라서 M이 최대가 되는 경우는 $a = \frac{2\pi}{3}$이고 $d = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$일 때이다.


x = a
sin 2x + d
-|x - π/2|

[문제 2-1]

(1) 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 경우를 나눠서 계산하자. 첫 번째 공이 빨간 공인 경우의 확률은 $\frac{r}{r+b}\times\frac{r+1}{r+b+1}$이고, 첫 번째 공이 파란 공인 경우의 확률은 $\frac{b}{r+b}\times\frac{r}{r+b+1}$이다.

따라서 확률의 덧셈정리에 의해 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률은 $\frac{r(r+1)+br}{(r+b)(r+b+1)}=\frac{r}{r+b}$이다.

(2) 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 경우는 모두 4가지이다. 빨간 공을 꺼내는 시행을 R, 파란 공을 꺼내는 시행을 B이라 하고 각 경우의 확률을 구하면 아래와 같다.

R-R-R : $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{60}$ ⋯ ①

B-R-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ②

R-B-R : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ③

B-B-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{60}$ ⋯ ④

따라서 조건부확률은 $\frac{①+②}{①+②+③+④}=\frac{24+6}{24+6+6+4}=\frac{3}{4}$이다.

(3) 2021회 시행 직후 공의 수는 2024개이고 빨간 공과 파란 공의 개수가 1012개로 같아야 하므로 빨간 공은 1010번, 파란 공은 1011번 꺼내져야 한다.

이렇게 공을 꺼내는 각 경우의 확률이 모두 $\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$와 같으므로 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률은

$${}_{2021}C_{1010}\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}=\frac{2021!}{1010!\times1011!}\cdot\frac{2\times(1011!)^2}{2023!}=\frac{2\times1011}{2022\times2023}=\frac{1}{2023}$$

가 된다.

[문제 2-2]

(1) 각 시행에서 꺼낸 공을 흰 공인 경우(W)와 흰 공이 아닐 경우(C)로 나누자. 각 경우의 확률과 X, X^2을 각각 구하면 아래와 같다.

C-C : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=2$, $X^2=4$

W-C : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=3$, $X^2=9$

C-W : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=4$, $X^2=16$

W-W : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=5$, $X^2=25$

즉, $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}$, $\mathrm{E}(X^2)=\frac{137}{10}$이다. 따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{29}{20}$이다.

(2) $3+a_1+\cdots+a_n=3^n+2$이므로 $a_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$이다. $2\cdot 3^6>546$이므로 $547-1=546$은 $2\cdot 3^0, 2\cdot 3^1, \ldots, 2\cdot 3^5$의 조합만으로 이루어져야 한다. 한편, 그러한 조합은 $547=1+2(3+3^3+3^5)$으로 유일함을 알 수 있다. 즉, 흰 공은 2, 4, 6번째 뽑혔다. 따라서 4번째 시행 직후 흰 공의 개수는 $1+6+54=61$ 개이다.

(3) 수열 $\{a_n\}$이 모든 n에 대해 $a_n\geq 0$, $a_{n+1}>a_n$이므로 $a_n\geq n-1$이다.
$2+12+4940=4954=3+a_1+a_2+\cdots+a_{100}\geq 3+0+1+\cdots+99=4953$ 이므로, $a_n\geq n-1$에 대하여 하나의 n을 제외하고 등호가 성립해야 한다. $n<100$일 때 $a_n\geq n$이면, $a_{n+1}\geq a_n+1=n+1$가 되어 전체 공의 개수는 4955 이상이라 모순이다. 따라서 $a_{100}=100$이고, $n\leq 99$ 이면 $a_n=n-1$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\left(\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}=\sum_{n=1}^{98}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}$$
$$=\sqrt{98}+\frac{10-\sqrt{98}}{2}=5+\frac{\sqrt{98}}{2}$$

이다.

한편 빨간 공의 개수가 $2=1+1$개이므로 두 번째 시행에서 반드시 빨간 공을 꺼내야 한다. 즉, 파란 공을 11개를 꺼내는 방법은 1을 사용하지 않아야 하므로, 11을 뽑는 방법은 아래와 같다.

- 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 (11개)
- 1번째 시행과 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+11=11$개)
- 1번째, 3번째, 10번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+9=11$개)
- 1번째, 3번째, 4번째, 7번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+3+6=11$개)
- 1번째, 3번째, 5번째, 6번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+4+5=11$개)

따라서, $m=1, 2, 3, 4$가 가능하다. 공을 다섯 번 꺼내면 파란 공은 최소한 $1+(0+2+3+4+5)=15$개 이상이므로, $m\geq 5$에서는 성립하지 않는다.

2021학년도 논술고사

자연계열(오후)
채점기준

표지를 제외한 페이지 수 :7

[문제 1-1] (15점)

(1) (7점) 두 함수 $f(x)=x^2-3x-6$과 $g(x)=x^3-4x+c$가 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다. 즉, $a^2-3a-6=a^3-4a+c$ 이고 $2a-3=3a^2-4$이다.

이를 풀면 $2a-3=3a^2-4$로부터, $3a^2-2a-1=(3a+1)(a-1)=0$ 이 되고 a는 정수가 아니므로 $a=-\dfrac{1}{3}$이다. (3점)

$a^2-3a-6=a^3-4a+c$에 $a=-\dfrac{1}{3}$을 대입하면 $\dfrac{1}{9}+1-6=-\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{3}+c$이므로 $27c=-167$이다. (4점)

(2) (8점) $f(x)$과 $g(x)$가 $x=a$에서 부드럽게 만나므로 $f(a)=g(a)$이고 $f'(a)=g'(a)$이다.

$f'(a)=g'(a)$이므로 $4a^3-4a-2=3a-5$로부터, $4a^3-7a+3=(a-1)(2a-1)(2a+3)=0$이고

가능한 a의 값은 1, $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{3}{2}$ 이다.

이 중 $f(a)=g(a)$를 만족하는 것을 찾으면 $a=1$ 이다. (4점)

따라서 $h(x)$는 $f(x)$에서 $g(x)$로 $x=1$에서 갈아타는 함수이고, 주어진 식을 계산하면 아래와 같다.

$$\int_0^2 h(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}-x^2\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{2}-\frac{5x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^2 \quad \text{(4점)}$$
$$=\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)+\left(4-10+1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{149}{30}$$

[문제 1-2] (15점)

(1) (7점) $y=2^x$와 $x=n$에서 부드럽게 만나는 직선은 $x=n$에서의 접선이다.

$f'(n)=2^n\ln 2$이고 점 $(n,2^n)$을 지나므로 접선의 방정식은 $y-2^n=2^n\ln 2(x-n)$가 되어

$a_n=\ln 2\,(e^{n\ln 2})=2^n\ln 2$ 이고 $b_n=2^n-n2^n\ln 2$가 된다. (4점)

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{\ln 2}-n\right)=\frac{100}{\ln 2}-5050$ 이다. (3점)

(2) (8점) $g(x)=px^2+qx+r$이라 하자. $g(0)=f(0)$로부터 $r=1$이고 $g'(0)=f'(0)$로부터 $q=1$이다.

$g(2)=f(2)$로부터 $p=\dfrac{e^2-3}{4}$이므로 $g(x)=\dfrac{e^2-3}{4}x^2+x+1$이다. (3점)

함수 $y=f(x)$의 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=e^2$이고, 함수 $y=g(x)$의 점 P에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=e^2-2$이고, (2점)

θ는 예각이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\tan\theta=\dfrac{e^2-(e^2-2)}{1+e^2(e^2-2)}=\dfrac{2}{(e^2-1)^2}$ 이다. (3점)

[문제 1-3] (20점)

(1) (9점) $f(x) = -x^4 - 2x^2 + b$와 $g(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 4x + c$가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로

$f(a) = g(a)$이고 $f'(a) = g'(a)$이다.

$f'(a) = g'(a)$이므로 $-4a^3 - 4a = -4a^2 - 4$가 되고 $a = 1$이다. (2점)

한편, $g(x)$는 $x \geq 1$에서 감소하므로 $h(x)$의 최댓값은 구간 $(-\infty, 1]$에서 $f(x)$의 최댓값이며,

이는 $f(x)$의 극댓값 혹은 $f(1)$이다.

$f'(x) = -4(x^2+1)x = 0$ 의 실수해는 $x = 0$이므로 $f(0)$와 $f(1)$의 값을 비교하면

$f(0) = b$이고 $f(1) = b - 6$이므로 b 최댓값이다. 즉, $b = 20$이다. (4점)

$f(1) = g(1)$로부터, $-3 + b = -\frac{16}{3} + c$이고 $c = 17 + \frac{16}{3}$이다.

따라서 $3(a+b+c) = 3\left(1 + 20 + 17 + \frac{16}{3}\right) = 130$ 이다. (3점)

(2) (11점) 두 함수가 $x = a$에서 부드럽게 만나므로, $f(a) = g(a)$이고 $a \neq \frac{\pi}{2}$이며, $f'(a) = g'(a)$이다.

$f(a) = g(a)$로부터, $d = -\sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right|$가 된다.

$f(x)$에서 $g(x)$로 $x = a$에서 갈아타는 함수의 최댓값은 $d+1$ 혹은 0이다.

따라서 $1 + d > 0$인 d의 존재여부와 존재하는 경우 그 최댓값을 살펴보면 된다. (3점)

$\left|a - \frac{\pi}{2}\right| \geq 2$이면 $1 + d = 1 - \sin 2a - \left|a - \frac{\pi}{2}\right| \leq 0$ 이다. $\left|a - \frac{\pi}{2}\right| < 2$이라 가정하자.

먼저 $a \leq \frac{\pi}{2}$라 하자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = 1$이므로 $a = \frac{\pi}{6} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ (k는 정수) 꼴이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{\pi}{6}$뿐이다.

이때 $d + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \left|\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right| + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} + 1 < 0$ 이다. (3점)

$a > \frac{\pi}{2}$이고 $\left|a - \frac{\pi}{2}\right| < 2$라 하자. $f'(a) = g'(a)$로부터 $2\cos 2a = -1$이므로 $a = \frac{\pi}{3} + k\pi$ 혹은 $a = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ (단, k는 정수)이고 이 중 범위를 만족하는 a는 $\frac{2\pi}{3}$ 뿐이다.

이때 $d + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + 1 > 0$이다.

따라서 M이 최대가 되는 경우는 $a = \frac{2\pi}{3}$이고 $d = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$일 때이다. (5점)

[문제 2-1] (21점)

(1) (6점) 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률을 경우를 나눠서 계산하자.

첫 번째 공이 빨간 공인 경우의 확률은 $\frac{r}{r+b}\times\frac{r+1}{r+b+1}$이고, (2점)

첫 번째 공이 파란 공인 경우의 확률은 $\frac{b}{r+b}\times\frac{r}{r+b+1}$이다. (2점)

즉 두 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 확률은 $\frac{r(r+1)+br}{(r+b)(r+b+1)}=\frac{r}{r+b}$이다. (2점)

(2) (7점) 세 번째 시행에서 꺼낸 공이 빨간 공일 경우는 모두 4가지이다. 빨간 공을 꺼내는 시행을 R, 파란 공을 꺼내는 시행을 B이라 하고 각 경우의 확률을 구하면 아래와 같다.

R-R-R : $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{60}$ ⋯ ① (1점)

B-R-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ② (1점)

R-B-R : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{60}$ ⋯ ③ (1점)

B-B-R : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{60}$ ⋯ ④ (1점)

따라서 조건부확률은 $\frac{①+②}{①+②+③+④}=\frac{24+6}{24+6+6+4}=\frac{3}{4}$이다. (3점)

(3) (8점) 2021회 시행 직후 공의 수는 2024개이고 빨간 공과 파란 공의 개수가 1012개로 같아야 하므로 빨간 공은 1010번, 파란 공은 1011번 꺼내져야 한다. (2점)

이렇게 공을 꺼내는 각 경우의 확률이 모두 $\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$와 같으므로 2021회 시행을 마친 직후 주머니의 빨간 공과 파란 공의 개수가 같을 확률은

$${}_{2021}\mathrm{C}_{1010}\frac{(2\times3\times4\times\cdots\times1011)\times(1\times2\times\cdots\times1011)}{3\times4\times\cdots\times2023}$$ 이다, (3점)

따라서 $\frac{2021!}{1010!\times1011!}\cdot\frac{2\times(1011!)^2}{2023!}=\frac{2\times1011}{2022\times2023}=\frac{1}{2023}$ 가 된다. (3점)

[문제 2-2] (29점)

(1) (9점) 각 시행에서 꺼낸 공을 흰 공인 경우(W)와 흰 공이 아닐 경우(C)로 나누자. 각 경우의 확률과 X, X^2을 각각 구하면 아래와 같다.

C-C : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=2$, $X^2=4$

W-C : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=3$, $X^2=9$

C-W : $\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{20}$, $X=4$, $X^2=16$

W-W : $\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{20}$, $X=5$, $X^2=25$

즉, $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{2}$ (4점)

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{137}{10}$이다. 따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2=\frac{29}{20}$이다. (5점)

(2) (9점) $3+a_1+\cdots+a_n=3^n+2$이므로 $a_n=3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$이다. (2점)

$2\cdot 3^6>546$이므로 $547-1=546$은 $2\cdot 3^0, 2\cdot 3^1, \ldots, 2\cdot 3^5$의 조합만으로 이루어져야 한다. 한편, 그러한 조합은 $547=1+2(3+3^3+3^5)$으로 유일함을 알 수 있다. 즉, 흰 공은 2, 4, 6번째 뽑혔다. (4점)
따라서 4번째 시행 직후 흰 공의 개수는 $1+6+54=61$ 개다. (3점)

(3) (11점) 수열 $\{a_n\}$이 모든 n에 대해 $a_n\ge 0$, $a_{n+1}>a_n$이므로 $a_n\ge n-1$이다.
$2+12+4940=4954=3+a_1+a_2+\cdots+a_{100}\ge 3+0+1+\cdots+99=4953$ 이므로, $a_n\ge n-1$에 대하여 하나의 n을 제외하고 등호가 성립해야 한다. $n<100$일 때 $a_n\ge n$이면, $a_{n+1}\ge a_n+1=n+1$가 되어 전체 공의 개수는 4955 이상이라 모순이다. 따라서 $a_{100}=100$이고, $n\le 99$ 이면 $a_n=n-1$이다. (5점)
따라서,

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\left(\sum_{n=1}^{98}\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}=\sum_{n=1}^{98}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{98}}$$
$$=\sqrt{98}+\frac{10-\sqrt{98}}{2}=5+\frac{\sqrt{98}}{2}\quad(2점)$$

이다.
한편 빨간 공의 개수가 $2=1+1$개이므로 두 번째 시행에서 반드시 빨간 공을 꺼내야 한다. 즉, 파란 공을 11개를 꺼내는 방법은 1을 사용하지 않아야 하므로, 11을 뽑는 방법은 아래와 같다.

- 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 (11개)
- 1번째 시행과 12번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+11=11$개$)$
- 1번째, 3번째, 10번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+9=11$개$)$
- 1번째, 3번째, 4번째, 7번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+3+6=11$개$)$
- 1번째, 3번째, 5번째, 6번째 시행에서 파란 공을 꺼냄 $(0+2+4+5=11$개$)$

따라서, $m=1, 2, 3, 4$가 가능하다. (2점)
공을 다섯 번 꺼내면 파란 공은 최소한 $1+(0+2+3+4+5)=15$개 이상이므로, $m\ge 5$에서는 성립하지 않는다. (2점)