2021학년도 논술고사

자연계열(오전)
모범답안

표지를 제외한 페이지 수 : 6

[문제 1-1]

(1) 구간 $(-\infty, 201]$에서 직선의 기울기가 음수이고, 구간 $[201, \infty)$에서 기울기가 양수이다. 따라서 그래프의 개형으로부터 $x=201$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $B(201) = \sum_{k=1}^{401}|201-k|$가 최솟값이 되며, 이를 계산하면

$B(201) = 2\sum_{k=1}^{200} k = 2 \cdot \dfrac{200\times 201}{2} = 200\times 201 = 40200$ 이다.

(2) x_k들이 모두 다르기 때문에, 집합 S는 $n+1$개의 원소를 가지고 다음과 같은 형태를 가진다.

$$S=\{-n, -(n-2), \ldots, n-2, n\}$$

따라서 S의 원소들의 제곱의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-n+2i)^2 &= \sum_{i=0}^{n}(n^2-4ni+4i^2) = n^2(n+1)-4n\sum_{i=1}^{n}i+4\sum_{i=1}^{n}i^2\\ &= n^2(n+1)-4n\cdot\frac{n(n+1)}{2}+4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= -n^2(n+1)+\frac{2}{3}\cdot n(n+1)(2n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

이고, a_n은 n에 대한 삼차식으로 최고차항이 $\frac{1}{3}n^3$이 되어 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{1}{3}$이다.

(3) $x_k=1$인 k의 개수를 a_1, $x_k=2$인 k의 개수를 a_2, $x_k=3$인 k의 개수를 a_3이라 하고 다음 ①과 ②를 생각하자.

① a_1, a_2 a_3가 모두 양수인 경우:

집합 $S=\{-a_1-a_2-a_3,\ -a_1-a_2+a_3,\ -a_1+a_2+a_3,\ a_1+a_2+a_3\}$이 된다.

이때 $-a_1-a_2-a_3=-n$ 이고 $a_1+a_2+a_3=n$ 이므로 S의 원소의 곱이 양수가 되기 위해서는 $-a_1-a_2+a_3=-n+2a_3<0$ 이고 $-a_1+a_2+a_3=n-2a_1>0$ 이어야 한다.

즉, a_1과 a_3은 모두 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수이므로 a_2가 결정되고, 모든 가능한 경우의 수는 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2$이다.

② a_1, a_2 a_3 중 어느 하나가 0인 경우:

a_1, a_2 a_3 중 0인 것이 2개이면, $S=\{-n, n\}$이 되어 S의 원소의 곱이 항상 음수가 되어 모순이다. 따라서 정확히 하나만 0이 되는데, $a_i=0$이고 $a_j, a_l>0$ (단, $j<l$)이라 두자. 그러면, $S=\{-a_j-a_l,\ -a_j+a_l,\ -a_j+a_l\}$이고 $-a_j-a_l=-n$ 이고 $a_j+a_l=n$ 이므로 $-a_j+a_l<0$가 성립해야 한다. 즉 가능한 경우는 a_l이 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수인 경우로 총 경우의 수는 $\frac{n}{2}-1$이 된다.

$a_i=0$인 i를 고르는 방법이 3가지이므로, 이 경우 가능한 경우의 수는 $\frac{3n}{2}-3$이다.

따라서 ①과 ②의 경우를 고려하면 S의 원소의 곱이 양수가 되는 n에 대한 식은 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{3n}{2}-3=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}-2$ 이다.

(4) $|x_k| < 1$로부터 $B(1) = n - \sum x_k$, $B(-1) = n + \sum x_k$이다.

$B(1) = n$이면 $x = 1$이 $B(x) = n$의 해가 된다.

$B(1) \neq n$이면, $B(1) + B(-1) = 2n$이므로 $B(1) < n$, $B(-1) > n$이거나 $B(1) > n$, $B(-1) < n$이다. 사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1, 1)$에서 방정식 $B(x) - n = 0$은 적어도 1개의 해를 가진다. 따라서 방정식 $B(x) = n$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 항상 해를 가진다.

[문제 1-2]

(1) $\sec 0 = 1$, $\sec\frac{\pi}{3} = 2$이므로 $C(x) = (1-\sec x)^2 + (2-\sec x)^2 = 5 - 6\sec x + 2\sec^2 x$이다. 따라서

$\int C(x)\tan x\,dx = 5\int \tan x\,dx - 6\int \tan x \sec x\,dx + 2\int \sec^2 x \tan x\,dx$이다.

한편 $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$, $\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$,

$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{\sec^2 x}{2} + C$ 이므로, $\int C(x)\tan x\,dx = -5\ln|\cos x| - 6\sec x + \sec^2 x + C$ 가 된다.

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2}$ 이 수렴하고 분모의 극한 $\lim_{x\to 1}(\ln x)^2 = 0$ 이므로 분자의 극한도 $\lim_{x\to 1} C(x) = 0$ 이다.

$C(x)$가 연속함수이므로, $0 = \lim_{x\to 1} C(x) = C(1) = (f(1) - f(x_1))^2 + (f(1) - f(x_2))^2$ 이 되어

$f(1) = f(x_1) = f(x_2)$이고, $C(x) = 2(f(x) - f(1))^2$이다.

이를 계산하기 위해 $\ln x = t$로 치환하면,

$\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2} = 2\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{\ln x}\right)^2 = 2\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(e^t)-f(e^0)}{t}\right)^2$ 이 된다.

$g(t) = f(e^t)$ 라 두면, $g'(t) = f'(e^t)\,e^t$이며, 미분 계수의 정의로부터

$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(0) = f'(1) = 3e^3$이다. 따라서 답은 $18e^6$이다.

[문제 2-1]

(1) k가지 색을 사용해서 삼색기를 칠하는 방법의 수는 깃발의 이웃하는 영역을 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수이다. 이는 곱의 법칙에 의해 $r(k) = k(k-1)(k-1)$이 된다.

$$\sum_{k=2}^{n} r(k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(k-1) = \sum_{\ell=1}^{n-1} (\ell+1)\ell^2 = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^3 + \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2 = \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2)$$

(2) 5가지 색으로 만드는 삼색기의 총 경우의 수 $r(5) = 5 \times 4^2 = 80$이므로 이 중 두 개의 깃발을 뽑는 경우의 수는 ${}_{80}C_2 = 40 \times 79 = 3160$이다.

각 삼색기를 색칠하기 위해서는 두 개 혹은 세 개의 색을 사용해야 한다. 골라진 두 깃발 모두가 세 개의 색을 사용하고 서로 중복되는 색이 사용되지 않았다면 최소 여섯 개의 색이 필요하다. 따라서 주어진 조건을 만족하기 위해서는 두 깃발 모두 두 개의 색을 사용하거나(①), 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 사용(②)하여야 한다.

① 두 깃발 모두 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_2 \times 2 \times {}_3C_2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 60$

② 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_3 \times 3! \times {}_2C_2 \times 2 = 120$

①과 ②에 따라서 원하는 확률은 $\frac{60+120}{3160} = \frac{9}{158}$

(3) ⅰ) 깃발 A를 칠하는 경우:

①	②	③
④	⑤	⑥

먼저 ②영역과 ④영역의 색이 같은 경우를 생각하면 ①과 ②의 색 선택은 모두 3×2가지 경우가 있고, ③과 ⑤의 색이 같은 경우(4가지)와 다른 경우(2가지)를 고려하면, 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $6 \times (4+2) = 36$가지이다. 비슷하게 ②영역과 ④영역의 색이 다른 경우를 생각하면 $6 \times (2+1) = 18$가지이다. 따라서 A를 칠하는 경우의 수를 a라 하면, $a = 36 + 18 = 54$이다.

ⅱ) 깃발 B를 칠하는 경우:

깃발 B를 칠하기 위해 아래 표시된 A와 모양이 동일한 부분을 생각하자.

		③		
		⑥		

③, ⑥ 부분에 칠할 수 있는 경우의 수는 모두 6가지이므로 ③, ⑥의 색이 정해져 있다면 표시된 부분을 색칠할 수 있는 경우의 수는 $\frac{a}{6}$가지. 따라서 B를 색칠하는 경우의 수는 먼저 처음 세 줄을 색칠하고(a가지) 뒤의 두 줄을 색칠하는($\frac{a}{6}$가지)를 색칠하는 경우와 같으므로 곱의 법칙에 의해 $a \times \frac{a}{6} = 486$이다.

[문제 2-2]

k번째 직사각형 안에 검은색으로 칠해지는 부분의 넓이는 $\frac{1}{k}\times\frac{1}{k+1}$이다.

따라서 $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$로 수렴한다.

또한 이 깃발 전체의 넓이는 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$이고,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\cdots$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n=\infty$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$이다. $S_n=a_n+b_n$이고, $\lim_{n\to\infty}b_n=1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이다.

한편, $-\frac{1}{n+1}=h$라 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이므로,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n)^{2n+2}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{2(n+1)}=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}\times(-2)}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

이므로 수렴한다.

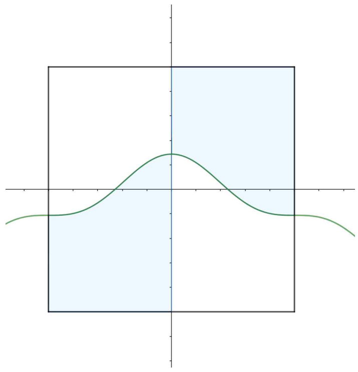
[문제 2-3]

(1) $|a| \le \frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $-1 \le x \le 1$ 범위에서 $-1 \le f(x) \le 1$을 만족하므로 정사각형 내부에 그려진다. 또한 $f(x)$는 y축에 대한 대칭이다. 따라서 $\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = 0$을 만족하는 a를 구하면 충분하다.

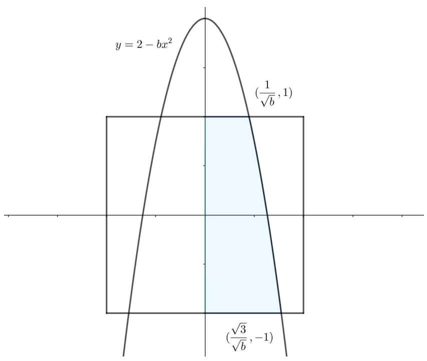
한편, $\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)= \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)- \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$이므로

$\int \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)- \frac{2}{3\pi}sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+ C$ (단, C는 적분 상수)

이고, 이를 이용하면 $\int_0^1\left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = \frac{1}{\pi}- \frac{1}{3\pi}+a=0$ 이다. 따라서 $a=-\frac{2}{3\pi}$이다.



(2) $f(x)=2-bx^2$는 y축에 대한 대칭인 함수이고 $b>3$이므로 아래 그림과 같은 개형을 가지고 있다. $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만들기 위해서는 아래 그림의 색칠된 넓이가 1이 되어야 한다.



$f(x)=2-bx^2$과 정사각형의 윗변과 아랫변이 만나는 점을 $x>0$범위에서 구해보면 각각 점 $\left(\frac{1}{\sqrt{b}}, 1\right)$, 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}, -1\right)$ 이다. 따라서 위 부분의 넓이는

$$1 = \frac{2}{\sqrt{b}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}}(2-bx^2+1)\,dx$$

이므로 이를 계산하면 $\sqrt{b}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}$을 얻을 수 있다.

2021학년도 논술고사

자연계열(오전) 채점기준

표지를 제외한 페이지 수 : 7

[문제 1-1] (30점)

(1) (6점) 구간 $(-\infty, 201]$에서 직선의 기울기가 음수이고, 구간 $[201, \infty)$에서 기울기가 양수이다. 따라서 그래프의 개형으로부터 $x=201$에서 최솟값을 가짐을 알 수 있다. (3점)

따라서 $B(201) = \sum_{k=1}^{401}|201-k|$가 최솟값이 되며, 이를 계산하면

$B(201) = 2\sum_{k=1}^{200} k$ (1 점) $= 2 \cdot \frac{200\times 201}{2} = 200 \times 201 = 40200$ 이다. (2점)

(2) (7점) x_k들이 모두 다르기 때문에, 집합 S는 $n+1$개의 원소를 가지고 다음과 같은 형태를 가진다.

$$S = \{-n, -(n-2), \cdots, n-2, n\} \text{ (2점)}$$

따라서 S의 원소들의 제곱의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(-n+2i)^2 &= \sum_{i=0}^{n}(n^2-4ni+4i^2) = n^2(n+1) - 4n\sum_{i=1}^{n} i + 4\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= n^2(n+1) - 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= -n^2(n+1) + \frac{2}{3} \cdot n(n+1)(2n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \text{(3점)}\end{aligned}$$

이고, a_n은 n에 대한 삼차식으로 최고차항이 $\frac{1}{3}n^3$이 되어 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3} = \frac{1}{3}$이다. (2점)

(3) (9점) $x_k = 1$인 k의 개수를 a_1, $x_k = 2$인 k의 개수를 a_2, $x_k = 3$인 k의 개수를 a_3이라 하고 다음 ①과 ②를 생각하자. (1점)

① a_1, a_2 a_3가 모두 양수인 경우:

집합 $S = \{-a_1-a_2-a_3, -a_1-a_2+a_3, -a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3\}$이 된다.

이때 $-a_1-a_2-a_3 = -n$ 이고 $a_1+a_2+a_3 = n$ 이므로 S의 원소의 곱이 양수가 되기 위해서는 $-a_1-a_2+a_3 = -n+2a_3 < 0$ 이고 $-a_1+a_2+a_3 = n-2a_1 > 0$ 이어야 한다.

즉, a_1과 a_3은 모두 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수이므로 a_2가 결정되고, 모든 가능한 경우의 수는 $\left(\frac{n}{2}-1\right)^2$이다. (4점)

② a_1, a_2 a_3 중 어느 하나가 0인 경우:

a_1, a_2 a_3 중 0인 것이 2개이면, $S=\{-n, n\}$이 되어 S의 원소의 곱이 항상 음수가 되어 모순이다. 따라서 정확히 하나만 0이 되는데, $a_i = 0$이고 $a_j, a_l > 0$ (단, $j < l$)이라 두자. 그러면, $S = \{-a_j-a_l, -a_j+a_l, -a_j+a_l\}$이고 $-a_j-a_l = -n$ 이고 $a_j+a_l = n$ 이므로 $-a_j+a_l < 0$가 성립해야 한다. 즉 가능한 경우는 a_l이 0보다 크고 $\frac{n}{2}$보다 작은 정수인 경우로 총 경우의 수는 $\frac{n}{2}-1$이 된다. $a_i = 0$인 i를 고르는 방법이 3가지이므로, 이 경우 가능한 경우의 수는 $\frac{3n}{2}-3$이다. (3점)

따라서 ①과 ②의 경우를 고려하면 S의 원소의 곱이 양수가 되는 n에 대한 식은

$\left(\frac{n}{2}-1\right)^2+\frac{3n}{2}-3=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{2}-2$ 이다. (1점)

(4) (8점) $|x_k|<1$로부터 $B(1)=n-\sum x_k$, $B(-1)=n+\sum x_k$이다. (1점)

$B(1)=n$이면 $x=1$이 $B(x)=n$의 해가 된다. (2점)

$B(1)\neq n$이면, $B(1)+B(-1)=2n$이므로 $B(1)<n$, $B(-1)>n$이거나 $B(1)>n$, $B(-1)<n$이다. (2점)

사잇값 정리에 의해 열린구간 $(-1, 1)$에서 방정식 $B(x)-n=0$은 적어도 1개의 해를 가진다. (2점)

따라서 방정식 $B(x)=n$은 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 항상 해를 가진다. (1점)

[문제 1-2] (20점)

(1) (10점) $\sec 0 = 1$, $\sec\frac{\pi}{3} = 2$이므로 $C(x) = (1-\sec x)^2 + (2-\sec x)^2 = 5 - 6\sec x + 2\sec^2 x$이다. (2점)

따라서 $\int C(x)\tan x\,dx = 5\int \tan x\,dx - 6\int \tan x \sec x\,dx + 2\int \sec^2 x \tan x\,dx$이다.

한편

$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ (2점)

$\int \tan x \sec x dx = \sec x + C$ (2점)

$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{\sec^2 x}{2} + C$ (혹은 $\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$) (2점)

이므로, $\int C(x)\tan x\,dx = -5\ln|\cos x| - 6\sec x + \sec^2 x + C$ 가 된다. (2점)

($\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$이므로, $\int C(x)\tan x\,dx = -5\ln|\cos x| - 6\sec x + \tan^2 x + C$ 도 정답)

(2) (10점) $\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2}$ 이 수렴하고 분모의 극한 $\lim_{x\to 1}(\ln x)^2 = 0$ 이므로 분자의 극한도 $\lim_{x\to 1} C(x) = 0$ 이다. (2점)

$C(x)$가 연속함수이므로, $0 = \lim_{x\to 1} C(x) = C(1) = (f(1) - f(x_1))^2 + (f(1) - f(x_2))^2$ 이 되어

$f(1) = f(x_1) = f(x_2)$이고, $C(x) = 2(f(x) - f(1))^2$이다. (3점)

이를 계산하기 위해 $\ln x = t$로 치환하면,

$$\lim_{x\to 1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2} = 2\cdot\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{\ln x}\right)^2 = 2\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(e^t)-f(e^0)}{t}\right)^2$$ 이 된다.

$g(t) = f(e^t)$ 라 두면, $g'(t) = f'(e^t)e^t$이며, 미분 계수의 정의로부터

$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = g'(0) = f'(1) = 3e^3$이다. (3점)

따라서 답은 $18e^6$이다. (2점)

[문제 2-1] (22점)

(1) (5점) k가지 색을 사용해서 삼색기를 칠하는 방법의 수는 깃발의 이웃하는 영역을 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수이다. 이는 곱의 법칙에 의해 $r(k)=k(k-1)(k-1)$이 된다. (2점)

$$\sum_{k=2}^{n} r(k)=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(k-1)=\sum_{\ell=1}^{n-1}(\ell+1)\ell^2=\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^3+\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^2=\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n-2)$$

(3점)

(2) (8점) 5가지 색으로 만드는 삼색기의 총 경우의 수 $r(5)=5\times 4^2=80$이므로 이 중 두 개의 깃발을 뽑는 경우의 수는 ${}_{80}C_2=40\times 79=3160$이다.

각 삼색기를 색칠하기 위해서는 두 개 혹은 세 개의 색을 사용해야 한다. 골라진 두 깃발 모두가 세 개의 색을 사용하고 서로 중복되는 색이 사용되지 않았다면 최소 여섯 개의 색이 필요하다. 따라서 주어진 조건을 만족하기 위해서는 두 깃발 모두 두 개의 색을 사용하거나(①), 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 사용(②)하여야 한다. (2점)

① 두 깃발 모두 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_2\times 2\times {}_3C_2\times 2\times \frac{1}{2}=60$ (2점)

② 한 깃발은 세 개의 색, 다른 깃발은 두 개의 색을 쓰는 경우 : ${}_5C_3\times 3!\times {}_2C_2\times 2=120$ (2점)

①과 ②에 따라서 원하는 확률은 $\frac{60+120}{3160}=\frac{9}{158}$ (2점)

(3) (9점) ⅰ) 깃발 A를 칠하는 경우:

①	②	③
④	⑤	⑥

먼저 ②영역과 ④영역의 색이 같은 경우를 생각하면 ①과 ②의 색 선택은 모두 3×2가지 경우가 있고, ③과 ⑤의 색이 같은 경우(4가지)와 다른 경우(2가지)를 고려하면, 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $6\times(4+2)=36$가지이다. 비슷하게 ②영역과 ④영역의 색이 다른 경우를 생각하면 $6\times(2+1)=18$가지이다. 따라서 A를 칠하는 경우의 수를 a라 하면, $a=36+18=54$이다. (4점)

ⅱ) 깃발 B를 칠하는 경우:

깃발 B를 칠하기 위해 아래 표시된 A와 모양이 동일한 부분을 생각하자.

		③		
		⑥		

③, ⑥ 부분에 칠할 수 있는 경우의 수는 모두 6가지이므로 ③, ⑥의 색이 정해져 있다면 표시된 부분을 색칠할 수 있는 경우의 수는 $\frac{a}{6}$가지. 따라서 B를 색칠하는 경우의 수는 먼저 처음 세 줄을 색칠하고(a가

지) 뒤의 두 줄을 색칠하는($\frac{a}{6}$가지)를 색칠하는 경우와 같으므로 곱의 법칙에 의해 $a \times \frac{a}{6} = 486$이다. (5점)

[문제 2-2] (10점)

k번째 직사각형 안에 검은색으로 칠해지는 부분의 넓이는 $\frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1}$이다. 따라서

$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$(2점)이므로 $\lim_{n \to \infty} b_n = 1$로 수렴한다.

또한 이 깃발 전체의 넓이는 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$이고,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots\right.$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n = \infty$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$이다. $S_n = a_n + b_n$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ 이므로 (3점)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다. (1점)

한편, $-\frac{1}{n+1} = h$라 놓으면 $n \to \infty$일 때, $h \to 0$이므로,

$$\lim_{n\to\infty} (b_n)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)} = \lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h} \times (-2)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \quad (3점)$$

이므로 수렴한다. (1점)

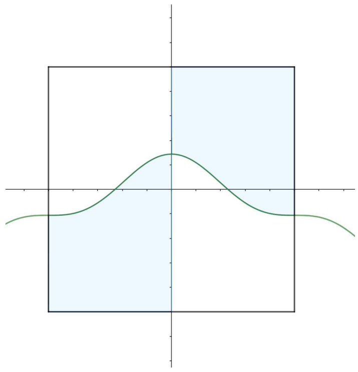
[문제 2-3] (18점)

(1) (9점) $|a| \le \dfrac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $-1 \le x \le 1$ 범위에서 $-1 \le f(x) \le 1$을 만족하므로 정사각형 내부에 그려진다. 또한 $f(x)$는 y축에 대한 대칭이다. 따라서 $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = 0$을 만족하는 a를 구하면 충분하다. (3점)

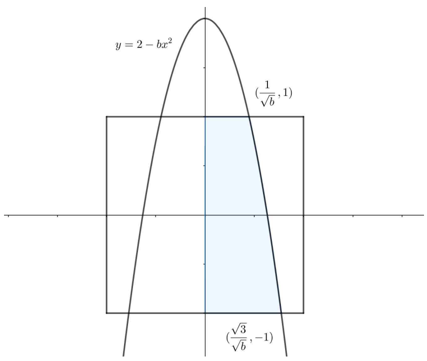
한편, $\cos^3\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$이므로

$\displaystyle\int \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{2}{3\pi}sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ (단, C는 적분 상수) (3점)

이고, 이를 이용하면 $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a\right)dx = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3\pi} + a = 0$ 이다. 따라서 $a = -\dfrac{2}{3\pi}$이다. (3점)



(2) (9점) $f(x) = 2 - bx^2$는 y축에 대한 대칭인 함수이고 $b > 3$이므로 아래 그림과 같은 개형을 가지고 있다. $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만들기 위해서는 아래 그림의 색칠된 넓이가 1이 되어야 한다. (1점)



$f(x) = 2 - bx^2$과 정사각형의 윗변과 아랫변이 만나는 점을 $x > 0$범위에서 구해보면 각각 점 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}},\ 1\right)$, 점 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}},\ -1\right)$ 이다. (2점)

따라서 위 부분의 넓이는

$$1 = \frac{2}{\sqrt{b}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{b}}} (2 - bx^2 + 1)\,dx \quad (3점)$$

이므로 이를 계산하면 $\sqrt{b} = 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{3}$을 얻을 수 있다. (3점)