자연계열(오전)

2021학년도 논술고사

자연계열(오전)

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2021학년도 자연계열(오전) 논술고사

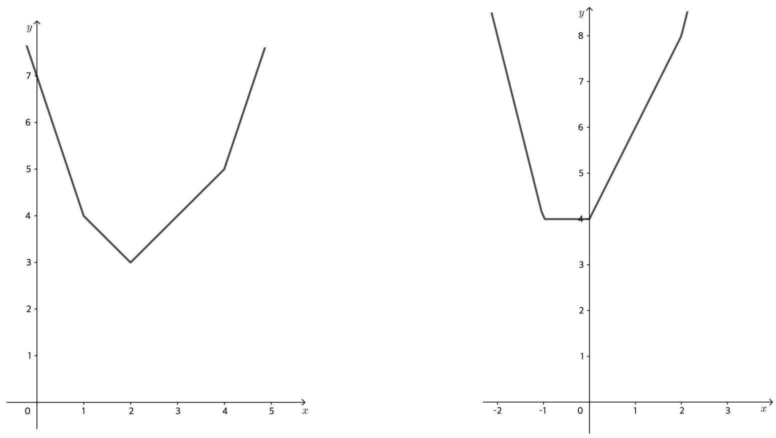
자연계열
(오전)

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) 양의 정수 n에 대하여 n개의 실수 x_1, ... , x_n(단, $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$)을 사용하여 함수 $B(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$B(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| = |x - x_1| + \ \cdots \ + |x - x_n|$$

함수 $y = B(x)$의 그래프는 구간 $(-\infty,\ x_1]$과 구간 $[x_n,\ \infty)$에서 기울기가 각각 $-n$과 n인 직선이 되며, $x_k \ne x_{k+1}$이면 닫힌구간 $[x_k,\ x_{k+1}]$에서도 직선이다. 이와 같이 $y = B(x)$의 그래프에 나타나는 직선의 기울기의 집합을 S라 하자. $-n$과 n은 항상 S의 원소이며 S의 원소의 개수는 $n+1$ 이하이다. [그림 1-1]의 왼쪽의 예에서 $y = B(x)$의 그래프에 나타나는 직선의 기울기는 $-3, -1$, 1, 3이므로 $S = \{-3, -1, 1, 3\}$이다.



$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$ $\qquad$ $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2$

[그림 1-1]

(나) 함수 $f(x)$와 두 실수 x_1과 x_2에 대해, 함수 $C(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$C(x) = (f(x) - f(x_1))^2 + (f(x) - f(x_2))^2$$

실수 a에 대해 $C(a) = 0$이면, $(f(a) - f(x_1))^2 = (f(a) - f(x_2))^2 = 0$ 이므로 $f(a) = f(x_1) = f(x_2)$ 이다.

[문제 1-1] (30점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) $n=401$이고 모든 $1 \le k \le n$에 대하여 $x_k = k$인 n개의 정수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$를 만들 때, $B(x)$의 최솟값을 구하여라.

(2) 서로 다른 n개의 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$와 집합 S를 만들 때, S의 원소의 제곱의 합을 a_n이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값을 구하여라.

(3) 2 이상의 짝수 n에 대해, $1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 3$을 만족하는 n개의 정수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$와 집합 S를 만들자. S의 원소의 곱이 양수가 되게 하는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$의 개수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(4) 모든 $1 \le k \le n$에 대하여 $-1 < x_k < 1$인 n개의 실수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 사용하여 함수 $B(x)$를 만들자. 방정식 $B(x) = n$의 해가 닫힌구간 $[-1, 1]$에 존재하는지 여부를 판단하고 그 이유를 서술하여라.

[문제 1-2] (20점) 제시문 (나)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x) = \sec x$ 와 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$를 사용하여 함수 $C(x)$를 만들 때, $\int C(x)\tan x\, dx$를 구하여라.

(2) 함수 $f(x) = e^{3x} - \cos^2(\pi x)$를 사용하여 함수 $C(x)$를 만들었더니 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{C(x)}{(\ln x)^2}$가 실수 L로 수렴하였다. 이때 L의 값을 구하여라.

2021학년도 자연계열(오전) 논술고사

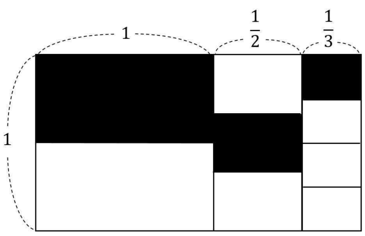
[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하라.

(가) [그림 2-1]과 같이 삼등분 된 모양의 깃발에 인접한 영역을 다른 색으로 칠한 것을 삼색기라 한다. 이때 회전하거나 뒤집어서 두 깃발이 같아지더라도 이들은 서로 다른 것으로 간주한다.

[그림 2-1]

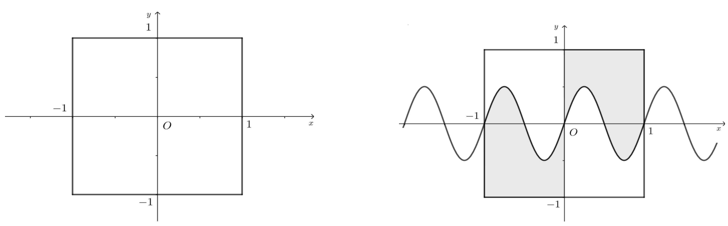
양의 정수 k에 대하여, k가지의 색을 사용하여 삼색기를 만드는 경우의 수를 $r(k)$라 하자. 예를 들어, 삼색기의 이웃하는 영역은 서로 다른 색을 가져야 하므로 곱의 법칙에 의해 $r(2)=2\times1\times1=2$이고, $r(3)=3\times2\times2=12$ 임을 알 수 있다.

(나) 양의 정수 $n(n\geq 2)$에 대하여, n개의 직사각형으로 구성된 깃발이 있고, $1\leq k\leq n$인 정수 k에 대하여 k번째 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{k}$이고 세로의 길이는 1로 일정하다. 각 k번째 직사각형을 $k+1$개의 합동인 작은 직사각형으로 다시 쪼개어 이 중 한 개를 검은색으로 색칠하고 나머지는 검은색이 아닌 색으로 칠한다. 검은색으로 칠해진 모든 직사각형의 넓이의 합을 b_n, 나머지 부분의 넓이를 a_n이라 하자. [그림 2-2]는 $n=3$일 때 그려지는 깃발의 예이다.



[그림 2-2]

(다) 가로와 세로의 길이가 모두 2인 정사각형 모양의 깃발이 [그림 2-3]의 왼쪽 그림과 같이 좌표평면에 놓여있다. 이때 정사각형의 각 변은 직선 $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$ 의 일부이다. 함수 $f(x)$에 대하여, 깃발이 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 의하여 같은 넓이를 가진 네 영역으로 나눠질 때, $f(x)$가 '균형 잡힌 깃발'을 만든다고 하자. 예를 들어 깃발이 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\pi x$의 그래프와 y축에 의하여 같은 넓이를 가진 네 영역으로 나눠지므로 함수 $f(x)$가 균형 잡힌 깃발을 만든다. ([그림 2-3] 참조)



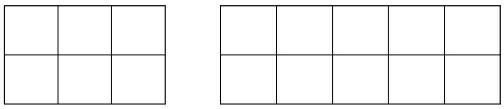
[그림 2-3]

[문제 2-1] (22점) 제시문 (가)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) $\sum_{k=2}^{n} r(k)$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 5가지의 색을 사용한 $r(5)$개의 모든 삼색기 중에서 임의로 2개를 골랐을 때, 각 깃발에 사용된 색의 집합이 서로소일 확률을 구하여라.

(3) 아래의 그림과 같은 모양을 가진 두 깃발 A와 B가 있다. 3가지의 색을 이용하여 인접한 영역이 서로 다른 색을 가지도록 칠하는 경우의 수를 각각 구하여라. (단, 회전하거나 뒤집어서 두 깃발이 같아지더라도 이들은 서로 다른 것으로 간주한다.)



깃발 A 깃발 B

[문항 2-2] (10점) 제시문 (나)에서 $\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} (b_n)^{2n+2}$의 수렴, 발산을 각각 조사하고, 수렴한다면 그 값을 구하여라.

[문항 2-3] (18점) 제시문 (다)를 읽고 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)=\frac{1}{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)+a$ (단, $|a|\le\frac{1}{2}$)이 균형 잡힌 깃발을 만들 때, a의 값을 구하여라.

(2) 이차함수 $f(x)=2-bx^2$ (단, $b>3$)이 균형 잡힌 깃발을 만들 때, $\sqrt{b}$의 값을 구하여라.