2020학년도 모의논술고사
모범답안

자연계열

성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 5

[문제 1-1]

(1) 점 X가 $(40, 19)$ 위치까지 가기 위해서는 E가 40번, N이 19번 진행되어야 한다. 따라서 모두 59번 이동하여야 하므로 $(40, 19)$에 적히는 수는 $A=2^{-59}$이다. 비슷한 이유로 $(40, 20)$에 적히는 수는 $B=2^{-60}$이다. 따라서 $\log_2 AB=\log_2 2^{-119}=-119$

(2) 좌표에 적히는 수가 2^{-2020}이므로 모두 2020번 진행되어야 한다. 이동하는 방식은 E, E, N이 반복되고 이를 한 주기라고 하자. $2020=3\times673+1$이므로 주기가 673번 반복하고 한 칸 더 이동하여야 한다. 따라서 E 이동은 모두 $2\times673+1=1347$번 시행되고, N이동은 673번 시행된다. 따라서 2^{-2020}가 적혀 있는 점의 좌표는 $(1347, 673)$이다.

(3) 점 X의 경로상의 점은 원점을 제외하고 항상 양의 정수 n에 대하여 $(2n-1, n-1)$, $(2n, n-1)$, $(2n, n)$로 쓰일 수 있다. 이 세 점이 $y\ge x^2-\frac{47}{2}x+\frac{125}{2}$를 만족하도록 하는 n을 차례대로 구해보면 아래와 같다.

① $n-1\ge(2n-1)^2-\frac{47}{2}(2n-1)+\frac{125}{2}$에서 $4(n^2-13n+22)=4(n-2)(n-11)\le0$이다. 따라서 $2\le n\le11$.

② $n-1\ge(2n)^2-\frac{47}{2}(2n)+\frac{125}{2}$에서 $4n^2-48n+\frac{127}{2}\le0$이다.

$f(n)=4n^2-48n+\frac{127}{2}$의 중심 축이 $n=6$이고 $f(1)>0$, $f(2)<0$이므로 $f(n)\le0$을 만족하는 자연수 n은 $2\le n\le10$이다.

③ $n\ge(2n)^2-\frac{47}{2}(2n)+\frac{125}{2}$에서 $4n^2-48n+\frac{125}{2}\le0$이고, 같은 방식으로 풀면 만족하는 자연수 n은 $2\le n\le10$이다.

따라서 점 X의 경로 위에서 $y\ge x^2-\frac{47}{2}x+\frac{125}{2}$에 해당하는 점은 $(3, 1)$부터 시작하여 $(21, 10)$까지의 28개의 점이다. [1] 따라서 적혀있는 수의 합 t는

$$t=\sum_{k=4}^{31}2^{-k}=2^{-4}\frac{1-\frac{1}{2^{28}}}{1-\frac{1}{2}}=2^{-3}-2^{-31}$$

이다. 따라서 $1-8t=2^{-28}$.

---

1) 과정 ①에서 이차함수 $f(x)=x^2-\frac{47}{2}x+\frac{125}{2}$는 X의 경로와 $(3, 1)$, $(21, 10)$과 만나고 두 도형의 모양을 생각하면 그 사이에 있는 모든 점들만이 이차함수 보다 위에 있다는 것을 알 수 있으므로, 과정 ②, ③은 생략할 수 있다.

[문제 1-2]

(1) $(3,3)$의 위치는 원점으로부터 6만큼 떨어져 있으므로 최소 6번 이동해야 한다. E, W, N, S의 횟수를 각각 e, w, n, s라고 하면 $e-w=3$, $n-$ s $=3$을 만족해야 하므로 $e=3+w$, $n=3+s$이다. 따라서 $e+w+n+s=6+2(w+s)$이므로 전체 횟수의 합 $e+w+n+s$는 반드시 짝수가 된다.

한편, 6이상의 모든 짝수 2ℓ (단, $\ell \geq 3$)에 대하여,

N, ..., N (N을 ℓ번 반복), E, E, E, S, ..., S (S를 $\ell-3$번 반복)

과 같은 방법으로 이동하면 이 경로는 겹치지 않고 2ℓ번 이동하여 $(3,3)$의 위치에 도달하게 된다. 따라서 $(3,3)$의 위치에 적힌 수가 2^{-k}라면 k는 6이상의 모든 짝수가 모두 가능하다. 이 중 2020보다 작거나 같은 6이상의 짝수는 모두 1008개다.

(2) 원점에서 출발하여 8번 이동하여 $(3,3)$으로 가려면 E가 세 번, N이 세 번과 함께 나머지 2번의 이동이 결정되면 된다. 나머지 움직임은 N, S이거나 W, E이다. 한편 X의 경로는 한번 지났던 점을 또 지나지 않으므로 N, S는 서로 붙어서 나오지 않고, 또한 W, E도 서로 붙어서 나오지 않는다.

나머지 움직임이 N, S 인 경우 :
총 이동하는 방법은 E, E, E, S, N, N, N, N을 한 번씩 사용하여 이동하는 것이다. S와 N이 연속해서 나올 수 없으므로 S는 반드시 E와 연속할 수 있다. 다음 세 가지 경우로 나누어 순열을 구해보자.

1) S로 시작하는 경우 - S, E, X, X, X, X, X, X에서 X의 칸을 두 개의 E, 네 개의 N으로 채우면 되므로 경우의 수는 $\dfrac{6!}{4!\times 2!}=15$이다.

2) S로 끝나는 경우 - 마찬가지로 X, X, X, X, X, X, E, S에서 X의 칸을 두 개의 E, 네 개의 N으로 채우면 되므로 경우의 수는 $\dfrac{6!}{4!\times 2!}=15$이다.

3) S가 도중에 나오는 경우 - E, S, E가 붙어서 나와야 하므로 E, S, E를 Z라고 표현하면, Z, E, N, N, N, N을 나열하는 방법의 수와 같다. 따라서 경우의 수는 $\dfrac{6!}{4!}=30$이다.

이를 종합하면 모두 $15+15+30=60$가지 경우가 있다.

나머지 움직임이 E, W인 경우에도 위와 같이 계산하여 모두 60가지가 된다.
따라서 점 X의 이동 경로의 경우의 수는 120이다.

[문제 2-1]

(1) $f_1(x)$를 x에 대해 미분하면 $f_1{}'(x)=8(x-3)^3-10(x-3)=2(x-3)(4(x-3)^2-5)$ 이다. $x-3=t$로 치환하면, $2t(4t^2-5)=0$가 되고 해는 $t=0,\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$이다.

따라서 $f_1{}'(x)=0$의 해는 $x=3$, $3\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$이다.

즉, $x=3$일 때 극댓값, $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$일 때 극솟값을 가진다는 것을 알 수 있고, 극댓점은 $(3,3)$, 극솟점은 $\left(3\pm\sqrt{\frac{5}{4}},-\frac{1}{8}\right)$이다.

이 세 점을 지나는 이차방정식은 제시문 (나)에 의하여, $x=3$에 대하여 대칭이라는 것을 알 수 있다. 따라서 $f_2=a(x-3)^2+r$ 라 둘 수 있다. $y=f_2(x)$의 그래프는 $(3,3)$과 $\left(3\pm\sqrt{\frac{5}{4}},-\frac{1}{8}\right)$을 지나므로, $f_2(3)=3$, $f_2\left(3\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{1}{8}$이다.

즉, $f_2(3)=r=3$, $f_2\left(3\pm\sqrt{\frac{5}{4}}\right)=\frac{5a}{4}+r=-\frac{1}{8}$ 이다. 따라서 $10a=-25$이다.

(2) 네 함수의 그래프는 모두 직선 $x=p$에 대하여 대칭인 그래프들이다. 주어진 두 이차함수 $y=2(x-3)^2$ 와 $y=2(x-3)^2+4$의 그래프는 평행 이동하여 겹쳐질 수 있으므로 서로 만나지 않는다. 또한 (1)에서 얻은 결과를 바탕으로, $f_2(x)=-\frac{5}{2}(x-3)^2+3$ 임을 알 수 있고, $y=f_2(x)$의 그래프는 주어진 이차함수 $y=f_3(x)$의 그래프와는 두 점에서 만나며, $y=f_4(x)$의 그래프와 만나지 않는다는 것을 알 수 있다. 따라서 $y=f_1(x)$의 그래프를 제외한 세 함수의 그래프들 사이의 교점의 개수는 2개이다.

이제 사차함수 $y=f_1(x)$과 다른 주어진 두 이차 함수사이의 교점의 개수를 살펴보자. $y=f_4(x)$의 그래프와 $y=f_1(x)$의 그래프의 교점의 개수는 $2(x-3)^4-7(x-3)^2-1=0$의 실수해의 개수와 같다. $t=(x-3)^2$으로 치환하면 $2t^2-3t-1=0$이 나오므로, 양수인 해가 하나이므로, $2(x-3)^4-3(x-3)^2-1=0$의 실수해는 두 개가 되어, 두 그래프의 교점의 개수 또한 2개가 된다.

마찬가지로 $y=f_3(x)$의 그래프와 $y=f_1(x)$의 그래프의 교점의 개수는 $2(x-3)^4-7(x-3)^2+3=0$의 실수해의 개수와 같다. $t=(x-3)^2$으로 치환하면 $2t^2-7t+3=(2t-1)(t-3)=0$가 되어 양수인 해가 두 개로, 즉, 두 그래프의 교점의 개수 또한 4개가 된다.

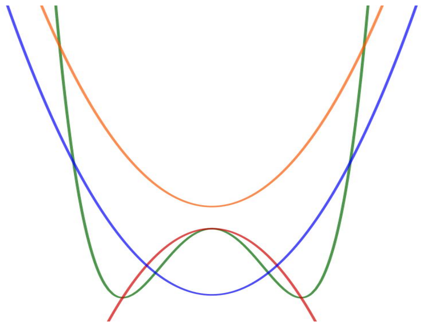
$y=f_2(x)$는 4차 함수 $y=f_1(x)$는 세 극점을 지나므로 세 점에서 만난다는 것을 알 수 있고, 그 중 하나는 대칭축에 해당하는 $x=3$이다.

함수의 그래프 중 어떠한 세 개도 한 점에서 만나지 않으므로, 이 11개의 교점은

모두 다르다. 따라서 교점의 개수는 11개이다.

이 11개의 교점 중 하나는 대칭축에 해당하는 $x=3$이다. x좌표가 $x=3$이 아닌 교점은 $x=3$에 대하여 대칭점인 점을 교점으로 가지며, $x=3$에 대칭인 두 교점의 x좌표의 합은 항상 6이므로, $x_1+\cdots+x_{11}=6\times5+3=30+3=33$이 성립한다.

(**) 네 함수 $y=f_i(x)$ $(i\in\{1,2,3,4\})$의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.

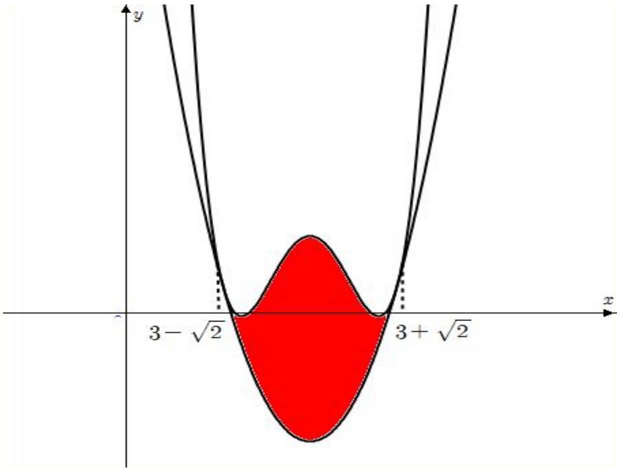


[문제 2-2]

(1) $h(x)=g(x)-f(x)$라 두자. 주어진 조건을 만족하기 위해서는 4차 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축 위에 그려지며 x축과 두 개의 점에서 접한다. 즉, $h''(x)=24(x-3)^2-16$ 되어 변곡점이 $x=3$에 대칭이므로 $y=h(x)$역시 $x=3$에 대칭이고 함수 $y=f(x)$의 그래프 역시 반드시 직선 $x=3$에 대하여 대칭이어야 한다. 따라서 $f(x)=3(x-3)^2+q$라 둘 수 있다.

$h(x)=2(x-3)^4-8(x-3)^2+3-q$가 직선 $x=3$에 대칭이며 x축에 두 점에서 접하는 4차 함수이므로, $h(3)=3-q>0$가 되고 $t=(x-3)^2$으로 치환한 이차방정식 $2t^2-8t+3-q=0$의 실근은 모두 양수이다. 따라서 이차방정식 $2t^2-8t+3-q=0$을 만족하는 실수 t는 반드시 하나가 나와야 하므로, 판별식 $D/4=16-6+2q=0$이다 즉, $q=-5$이다. 따라서 $f(3)=q=-5$이다.

(2) 두 곡선 $f(x)=3(x-3)^2-5$, $g(x)=2(x-3)^4-5(x-3)^2+3$ 교점의 x좌표를 구해보면, $x=3\pm\sqrt{2}$ 이다. 이를 그래프로 표현하면 다음과 같다.



따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S=\int_{3-\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}}[g(x)-f(x)]dx$$

이다. 이제 $x-3=t$로 치환하면

$$S\text{의 넓이 } = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(2t^4-8t^2+8)dt=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+8t\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{128}{15}\sqrt{2}$$