2020학년도 모의논술고사 문항

자연계열

성 명	
전 형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

2020년 아주대학교 모의논술고사 자연계열

[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[제 시 문]

좌표평면 위를 움직이는 점 X가 있다. 점 X의 좌표를 (x, y)라 할 때, X가 $(x+1, y)$, $(x-1, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y-1)$ 중 하나의 위치로 이동하는 것을 1칸 움직이는 것이라 하고, 각각 E, W, N, S 라 표현하자. (그림 1-1 참조)

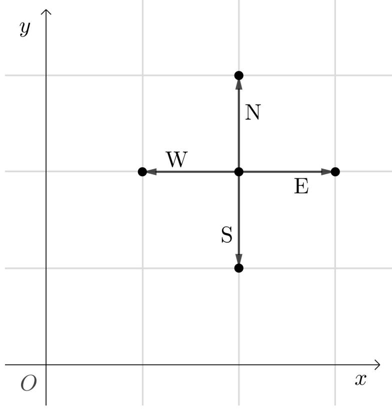

그림 1-1

점 X가 $(0, 0)$에서 출발하여 1칸씩 움직일 때, 그 경로의 점들에 다음 조건을 만족하도록 수를 하나씩 적는다. 이때 X는 한 번 지났던 점은 다시 지나지 않는다.

< 조 건 >

㉠ $(0, 0)$ 위치에 1을 적는다.

㉡ (x, y) 위치에 A를 적고 1칸 움직여 (x', y')으로 이동하는 경우, (x', y') 위치에 $\dfrac{A}{2}$를 적는다.

예를 들어, X가 $(0, 0)$에서 출발하여 E와 N을 한 번씩 반복하여 이동하였을 때의 경로와, 이때 경로 상의 점들에 적힌 수는 그림 1-2와 같다.

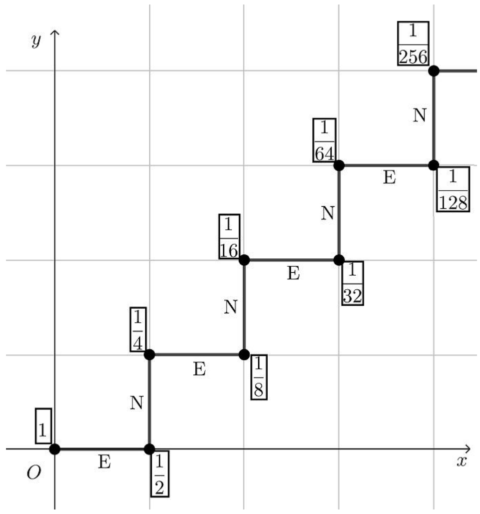

그림 1-2

[문항 1-1] (25점) 점 X가 $(0,0)$을 출발하여 지났던 점을 다시 지나지 않고 E, E, N을 반복하며 이동하는 점이고, 그 경로의 점들에 제시문의 조건을 만족하도록 수를 적을 때, 다음 논제에 답하시오.

(1) $(40,19)$ 위치에 적힌 수를 A, $(40,20)$ 위치에 적힌 수를 B라 할 때, $\log_2 AB$ 의 값을 구하라.

(2) 2^{-2020}이 적힌 점의 좌표를 구하라.

(3) 점 X가 움직이며 적은 수들 중 $y \geq x^2 - \frac{47}{2}x + \frac{125}{2}$를 만족하는 좌표평면의 영역에 적힌 수들의 합을 t라 할 때, $1-8t$의 값을 구하여라.

[문항 1-2] (25점) 점 X가 $(0,0)$을 출발하여 지났던 점을 다시 지나지 않으며 1칸씩 이동하는 점이다. 그 경로의 점들에 제시문의 조건을 만족하도록 수를 적을 때, 다음의 논제에 답하시오.

(1) $(3,3)$ 위치에 적힌 수를 2^{-k}라 할 때, k로 가능한 값 중에서 2020보다 작거나 같은 수는 모두 몇 개인지 구하라.

(2) $(3,3)$ 위치에 적힌 수가 2^{-8}일 때, X의 이동 경로의 경우의 수를 구하라.

[문항 2] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

[제 시 문]

(가) 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프가 직선 $x=p$에 대하여 대칭이라고 하자. 이때 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$의 그래프의 한 교점 P의 x좌표가 $p+t$라면 x좌표가 $p-t$인 교점 Q가 반드시 존재해야 한다. 왜냐하면 f_i $(i=1,2)$는 $x=p$에 대하여 대칭이므로 $f_i(p-t)=f_i(p+t)$이 성립하고, $f_1(p-t)=f_1(p+t)=f_2(p+t)=f_2(p-t)$이므로 점 $\mathrm{Q}(p-t,\, f_1(p-t))$는 교점이 된다. (그림 2-1 참조)

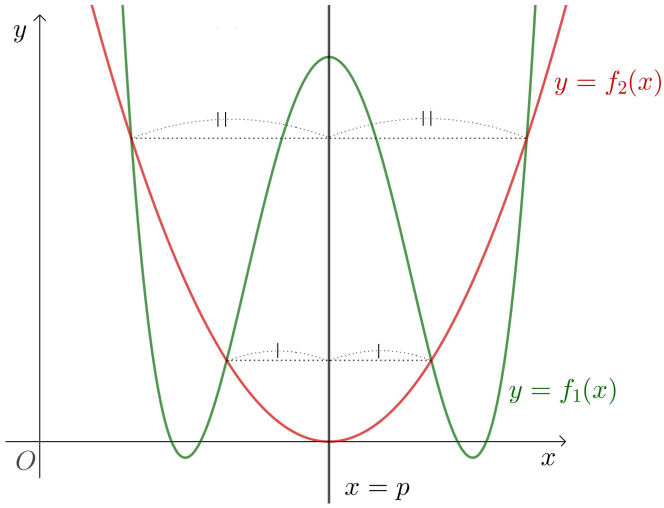

그림 2-1

예를 들어 이차함수 $y=a(x-p)^2+b$ (단, $a\neq 0$)의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭이 된다. 마찬가지로 $y=c(x-p)^4+d(x-p)^2+e$ (단, $c\neq 0$)꼴의 사차함수의 그래프 역시 직선 $x=p$에 대하여 대칭이다. 이 두 그래프의 교점의 x좌표는 사차방정식 $c(x-p)^4+(d-a)(x-p)^2+(e-b)=0$의 실수해이다. 주어진 방정식을 $t=(x-p)^2$으로 치환하여 t에 관한 방정식 $ct^2+(d-a)t+(e-b)=0$을 얻자. 이 이차방정식의 양수인 실수해 t_0에 대하여 사차방정식의 해는 $p\pm\sqrt{t_0}$로 얻어지므로 교점의 x좌표는 항상 $p+\sqrt{t_0}$, $p-\sqrt{t_0}$ 꼴로 표현된다.

(나) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ (단, $a\neq 0$)의 그래프는 직선 $x=-\dfrac{b}{2a}$에 대하여 대칭이 됨은 잘 알려져 있다. 이 이차함수가 y좌표가 똑같은 두 점 $\mathrm{P}(r,\, s)$, $\mathrm{Q}(r',\, s)$ (단, $r\neq r'$)을 지난다고 하자. 그러면 이 두 점의 중점은 반드시 이차함수의 대칭축 위에 있어야 하므로 $\dfrac{r+r'}{2}=-\dfrac{b}{2a}$가 성립한다. 따라서 이 이차함수는 $y=a\left(x-\dfrac{r+r'}{2}\right)^2+q$의 형태로 쓸 수 있다.

[문항 2-1] (25점) 사차함수 $f_1(x)=2(x-3)^4-5(x-3)^2+3$의 모든 극점을 지나는 이차함수를 $f_2(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, 다음 논제에 답하시오.

(1) 사차함수 $y=f_1(x)$의 극점을 모두 구하고, $10a$의 값을 구하라.

(2) 두 함수 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$와 또 다른 두 개의 이차함수 $f_3(x)=2(x-3)^2$, $f_4(x)=2(x-3)^2+4$의 그래프를 생각하자. 네 함수의 그래프 중 어떠한 세 개도 한 점에서 만나지 않는다. 네 함수의 그래프 중 어느 두 개가 만나서 생기는 교점을 각각 P_1, P_2, …, P_n이라 하고, P_n의 x좌표를 x_n이라 하자. 모든 교점의 개수 n과 $x_1+x_2+\cdots+x_n$의 값을 각각 구하라.

[문항 2-2] (25점) 이차함수 $f(x)=3x^2+bx+c$와 사차함수 $g(x)=2(x-3)^4-5(x-3)^2+3$ 이 아래 조건을 만족할 때, 다음 논제에 답하시오.

< 조 건 >

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만나고, 모든 x에 대하여 $f(x)\le g(x)$이다.

(1) $f(3)$의 값을 구하라.

(2) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하라.