(3) **(8점)**

$y_1 + \cdots + y_n = t_n$이라 두면, $t_n^2 + 1 = n + 1$ 이므로 $t_n = \sqrt{n}$이다. 따라서 $y_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$이다. **(3점)**

$y_n + \dfrac{1}{y_n} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \dfrac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \sqrt{n} + \sqrt{n-1} = 2\sqrt{n}$ 이므로 **(3점)**

$2\sqrt{n} \le 20$을 풀면 가장 큰 양의 정수 n은 100이다. **(2점)**

[문제 1-2] (30점)

(1) **(8점)**

이차함수 $y = f(x)$는 제시문 (나)에 건들을 만족해야 하므로, $f(x) \le 0$이고 $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$을 지나야 하므로 $f(x) = -x^2$ 이다. **(1점)**

제시문 (나)의 내용을 이용하면, A의 넓이는 $2 + 2\int_0^1 (-x^2)dx = \dfrac{4}{3}$가 된다. **(2점)**

직사각형 R_2의 x축과 평행한 한 변의 길이를 $2b$ (단, $b > 1$)라 하면, R_2와 $y = f(x)$가 만나는 두 점의 $(-b, -b^2)$, $(b, -b^2)$이고, 제시문 (나)에 의해 영역 A와 영역 B가 합쳐진 부분의 넓이는 $2b^3 + 2\int_0^b (-x^2)dx = \dfrac{4}{3}b^3$ 이다. B의 넓이는 $\dfrac{4}{3}b^3 - \dfrac{4}{3}$이 되고, **(3점)**

영역 A와 영역 B의 넓이가 서로 같으므로 $\dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}b^3 - \dfrac{4}{3}$이고, $b = \sqrt[3]{2}$이다.

따라서, 직사각형 R_2의 넓이는 $4b^3$ 이므로 8이다. **(2점)**

(2) **(10점)**

함수 $y = \cos^2 x - 1$에 대하여 $y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$이고, $y'' = -2\cos 2x$ 이므로

$y'' = 0$의 해는 $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$의 범위에서 $x = \dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}$이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{1}{2}\right)$이다. **(3점)**

제시문 (나)에 의해 A의 넓이를 구하면 $\dfrac{\pi}{4} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 1)dx$가 된다.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 1)dx = \left[\dfrac{\sin 2x}{4} - \dfrac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\pi}{8}$이므로 A의 넓이는

$\dfrac{\pi}{4} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - 1)dx = \dfrac{\pi}{4} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$이다. **(3점)**

한편, 직사각형 R_2의 x좌표는 $\dfrac{\pi}{2}$이고 이때의 함숫값은 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$이므로 이때 A와 B의 영역의 합을 구하면 $\pi + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 1)dx = \pi + \left[\dfrac{\sin 2x}{2} - x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$이다. **(3점)**

따라서, 영역 B의 넓이는 $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$이다. **(1점)**

(3) **(12점)**

제시문 (나)에 의하여 $g(a)=-2af(a)+2\int_0^a f(x)dx$ 이다. **(3점)**

$g'(a)=-2f(a)-2af'(a)+2\frac{d}{da}\int_0^a f(x)dx$이고, 적분과 미분의 관계에 의하여 $\frac{d}{da}\int_0^a f(x)dx=f(a)$이므로, $g'(a)=2af'(a)$가 성립한다. 따라서 $\lim_{a\to 0}\frac{g'(a)}{a}=2f'(0)$이다. **(3점)**

한편 $f(-x)=f(x)$이므로 $f'(0)=-f'(0)$이므로, $2f'(0)=0$이다. 따라서 $f'(0)=0$이다. **(5점)**

$\lim_{a\to 0}\frac{g'(a)}{a}=0$ 이다. **(1점)**

* 예제로 접근한 경우, 점수 없음. (예를 들어, $f(x)=-x^2$ 으로 놓고 푸는 경우, 0점).
* $f'(0)=0$ 이라는 사실을 언급만 하고 (“y축에 대칭이다” 혹은 “f가 $x=0$에서 극대값을 가진다”) 이유없이 그냥 이용하는 경우 −5점.

[문제 2-1] (20점)

(1) **(6점)**

아주가 D를 지나지 않으므로 점 A와 연결된 선들만 고려하면 된다. 따라서 홀수 번째의 시행에서 뽑는 공과 짝수 번째 시행 때 뽑는 공의 색은 같아야 한다. 그리고 짝수 번째에만 A의 위치에 있을 수 있다. 따라서 $p=0$이다. **(2점)**

홀수 번째 흰 공을 뽑는 경우가 모두 k번 있다고 하면 6번째에서 다시 A에 있을 확률은 $\sum_{k=0}^{3} {}_3C_k\left(\frac{4}{25}\right)^k\left(\frac{9}{25}\right)^{3-k}$이다. 따라서 이항정리에 의하여 $q=\left(\frac{4}{25}+\frac{9}{25}\right)^3=\left(\frac{13}{25}\right)^3$이다. **(4점)**

(2) **(14점)**

$2n$회의 시행 후, D를 지나지 않았고 홀수 번째 흰 공을 뽑는 경우가 k번 있다고 하자. 그럼 그때 받는 보상이 정확히 $X=2^k$가 된다. 각 경우의 확률은 $\left(\frac{4}{25}\right)^k\left(\frac{9}{25}\right)^{n-k}$이며, ${}_nC_k$가지의 경우가 있으므로 이러한 경우의 확률은 $P(X=2^k) = {}_nC_k\left(\frac{4}{25}\right)^k\left(\frac{9}{25}\right)^{n-k}$가 된다. **(4점)**

확률변수 X는 $0, 2^0, 2^1, \ldots, 2^n$의 값이 가능하므로 기댓값 $E(X)$는 $\sum_{k=0}^{n} 2^k{}_nC_k\left(\frac{4}{25}\right)^k\left(\frac{9}{25}\right)^{n-k}$이다, **(2점)**

이항정리에 의하여 $E(X)=\sum_{k=0}^{n} 2^k{}_nC_k\left(\frac{4}{25}\right)^k\left(\frac{9}{25}\right)^{n-k}=\left(\frac{8}{25}+\frac{9}{25}\right)^n=\left(\frac{17}{25}\right)^n$이다. **(3점)**

한편, 같은 방법으로 $E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}{}_nC_k\left(\frac{4}{25}\right)^k\left(\frac{9}{25}\right)^{n-k}=\left(\frac{16}{25}+\frac{9}{25}\right)^n=1$이므로, **(3점)**

분산은 $E(X^2)-E(X)^2=1-\left(\frac{17}{25}\right)^{2n}$이다. **(2점)**

[문제 2-2] (30점)

(1) **(8점)**

흰 공이나 검은 공을 뽑는 횟수를 k회라 하면, 이때의 확률은 ${}_nC_k\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(\frac{1}{6}\right)^{n-k}$이다. **(2점)**

따라서

$$p_n={}_nC_0\left(\frac{5}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^n+{}_nC_1\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+{}_nC_2\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}+{}_nC_3\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^{n-3}+{}_nC_4\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^{n-4}$$

이다. 따라서 $6^n p_n$은 최고차항의 계수가 $\frac{5^4}{24}$인 n에 대한 사차다항식이 된다. **(3점)**

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n}{n^4}p_n=\frac{5^4}{4!}=\frac{625}{24}$이다. **(3점)**

* $6^n p_n$은 최고차항의 계수가 $\frac{5^4}{24}$인 n에 대한 사차다항식임은 p_n을 정확히 구하지 않고도 알 수 있다.

(2) **(6점)**

(풀이1) $q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$이므로 $\sum_{n=3}^{\infty} q_n$은 초항이 $\frac{4}{27}$이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비급수가 된다. **(3점)**

따라서, $\sum_{n=3}^{\infty} q_n = \frac{4}{27} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$이다. **(3점)**

(풀이2) $q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$은 초항이 $\frac{1}{3}$이고 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비급수가 된다. **(3점)**

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$이므로 $\sum_{n=3}^{\infty} q_n = 1 - q_1 - q_2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$이다. **(3점)**

(3) **(16점)**

y의 값을 먼저 구해보자. 뽑힌 흰 공의 수에 대한 제약이 없다면, 수리가 정확히 5번 만에 A의 위치로 돌아오는 경우의 수는, 첫 번째 시행 후에 가능한 위치는 세 가지이고, 두 번째, 세 번째, 네 번째의 시행 후에 수리의 가능한 위치는 B, C, D 중에서 자기 자신이 아닌 위치인 두 가지이므로, 총 $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$가지이다. 따라서 24에서 흰 공이 3번 이상 뽑히는 경우의 수를 빼주면 된다.

공을 뽑는 순서를 달리하더라도, 최종 위치는 변하지 않는다. 흰 공이 5번 뽑히는 경우는 두 번째에 A의 위치로 돌아와야 하고, 4번 뽑히는 경우는 5번째에 A의 위치에 있을 수 없으므로 5번째에 처음으로 A의 위치로 돌아오기 위해서는 흰 공은 3번 이하 뽑혀야 한다. 따라서 y는 24에서 흰 공이 정확히 3번 뽑히는 경우의 수를 뺀 수이다. 흰 공이 정확히 3번 뽑히는 경우에는 반드시 검은 공이 1번, 붉은 공이 1번 뽑혀야 한다. **(4점)**

(i) 처음에 흰 공을 뽑지 않는 경우

두 번째, 세 번째는 무조건 흰 공을 뽑아야 하고 네 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한가지로 결정된다. 따라서 경우의 수는 모두 4가지이다.

(ii) 처음에 흰 공이 뽑는 경우

두 번째에는 흰 공이 뽑히면 안 되고, 세 번째는 무조건 흰 공이 뽑혀야 한다. 또한 네 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한 가지로 결정이 되므로 총 4가지 경우가 있다.

따라서 전체 방법의 수는 $y = 24 - 8 = 16$이다. **(4점)**

이제 x의 값을 구해보자. 뽑힌 흰 공의 수에 대한 제약이 없다면, 수리가 정확히 6번 만에 A의 위치로 돌아오는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ 가지다.

이제 흰 공이 세 번 이상 뽑히는 경우를 세어보자. 공을 뽑는 순서를 달리하더라도, 최종 위치는 변하지 않는다. 따라서 흰 공을 정확히 4번 뽑아야 하고, 다른 2개의 공은 색이 같아야 한다. **(4점)**

(i) 처음에 흰 공을 뽑는 경우

두 번째에는 흰 공이 뽑히면 안 되고, 세 번째, 네 번째에는 무조건 흰 공이 뽑혀야 한다. 다섯 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한가지로 결정된다. 따라서 경우의 수는 모두 4가지이다.

(ii) 처음에 흰 공이 아닌 공을 뽑는 경우

두 번째, 세 번째, 네 번째는 무조건 흰 공을 뽑아야 하고 다섯 번째 흰 공 선택하는지 여부에 따라 한 가지로 결정된다. 따라서 경우의 수는 모두 4가지이다.

따라서 전체 방법의 수는 $x = 48 - 8 = 40$이다. **(4점)**