2020학년도 논술고사

자연계열
(오후, 의학과 제외)

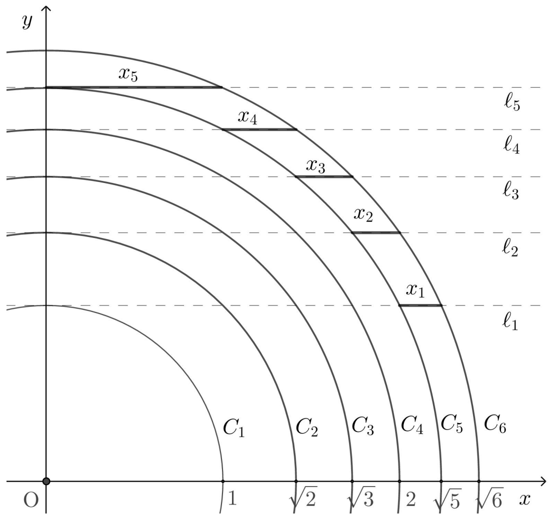
성　　명	
전　　형	
수험번호	

표지를 제외한 페이지 수 : 4

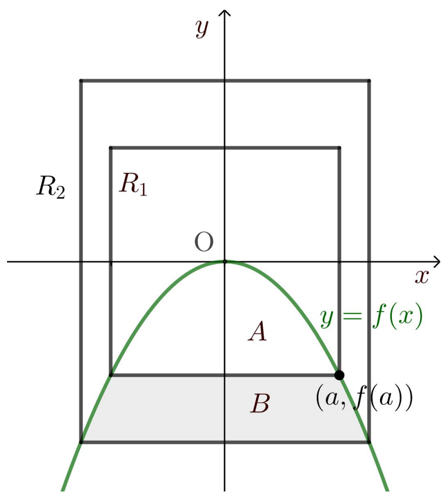
[문항 1] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 양의 정수 n과 m에 대하여 평면 위에 중심이 O이면서 반지름이 $\sqrt{n}$인 원을 C_n이라 하고, 점 $(0, \sqrt{m})$을 지나면서 x축과 평행한 직선을 ℓ_m이라 하자.

[그림 1-1]과 같이 5 이하의 양의 정수 m에 대하여 직선 ℓ_m이 제1사분면에서 두 원 C_5, C_6과 만나는 두 점을 잇는 선분의 길이를 x_m이라 하자. 이때 $(x_5)^2 = (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2 = 1$ 이므로 $x_5 = 1$ 이다.



[그림 1-1]



[그림 1-2]

(나) 직사각형의 중심이란 두 대각선의 교점을 의미한다. [그림 1-2]와 같이 좌표축과 평행한 변으로 이루어진 두 직사각형 R_1, R_2가 있다. 두 직사각형의 중심은 원점 O이고, 직사각형 R_2의 내부에 직사각형 R_1이 놓여있다. (단, 두 직사각형의 변은 서로 만나지 않는다.) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$이며 이계도함수를 갖는 함수 $y = f(x)$가 있다. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고, 원점 O와 각 사각형의 꼭짓점 두 개씩을 지나며 사각형과는 꼭짓점 이외의 점에서는 만나지 않는다고 하자. 이때 $y \le f(x)$인 영역과 R_1, R_2에 의해 아래와 같은 두 영역 A, B가 생긴다. (단, 각 영역은 경계를 포함한다.)

영역 A : $y \le f(x)$인 직사각형 R_1의 내부 영역

영역 B : $y \le f(x)$인 직사각형 R_2의 내부 영역 중 A와 겹치지 않는 영역

영역 A의 넓이는 다음과 같이 구할 수 있다. 직사각형 R_1과 곡선 $y = f(x)$의 교점 중 제4사분면 위에 있는 것의 좌표를 $(a,\ f(a))$라 하자. 제4사분면에 속하는 R_1의 내부 영역의 넓이는 $|a \times f(a)|$이고 이 영역 중 A에 포함되지 않는 부분의 넓이는 $\int_0^a |f(x)|\,dx$이다. 따라서 이 두 값의 차이와 $y = f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이라는 조건으로부터 A의 넓이를 구할 수 있고, 이는 a에 대한 함수 $g(a)$로 나타난다.

[문제 1-1] (20점) 아래의 물음에 답하시오.
(1) 제시문 (가)에서 주어진 x_3과 x_4를 구하고, $x_1+x_2+x_3+x_4$의 값을 구하시오.

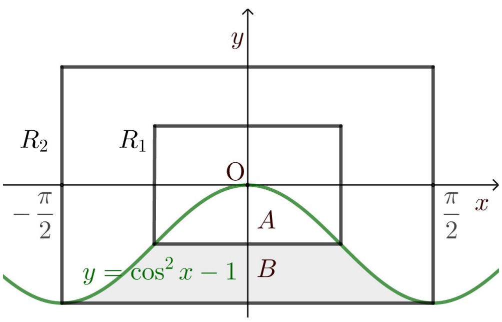
(2) 제시문 (가)에서 원 C_4가 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4와 만나는 교점을 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하자. $\angle\mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2=\alpha$, $\angle\mathrm{P}_3\mathrm{OP}_4=\beta$라 할 때, $\tan\alpha$와 $\csc\beta$의 값을 각각 구하시오.

(3) 제시문 (가)에서 양의 정수 n에 대하여 직선 ℓ_1이 제1사분면에서 두 원 C_n, C_{n+1}과 만나는 두 점을 잇는 선분의 길이를 y_n이라 하자. 이때 다음 부등식이 성립하는 가장 큰 양의 정수 n을 구하시오.

$$y_n+\frac{1}{y_n}\leq 20$$

[문제 1-2] (30점) 아래의 물음에 답하시오.
(1) 제시문 (나)에서 직사각형 R_1은 한 변의 길이가 2인 정사각형이고, 함수 $y=f(x)$는 이차함수라 하자. 두 영역 A와 B의 넓이가 서로 같을 때, 직사각형 R_2의 넓이를 구하시오.

(2) 제시문 (나)에서 $f(x)=\cos^2 x-1$인 경우를 생각하자. 곡선 $y=f(x)$는 직사각형 R_1과 이 곡선의 변곡점에서 만나고, 직사각형 R_2와의 교점의 x좌표는 $\pm\frac{\pi}{2}$이다. 이때 두 영역 A와 B의 넓이를 각각 구하시오.



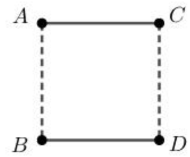
(3) 제시문 (나)에서 정의된 a에 대한 함수 $g(a)$에 대하여 $\lim_{a\to 0}\frac{g'(a)}{a}$의 값을 구하시오.

[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

(가) 네 점 A ,B, C, D가 [그림 2-1]과 같이 배치되어 있고, A, C와 B, D는 각각 실선, A, B와 C, D는 각각 점선으로 연결되어 있다. 아주는 점 A의 위치에서 시작하여 아래와 같은 규칙으로 움직인다. 흰 공이 2 개, 검은 공이 3 개 들어 있는 주머니에서 공을 임의로 1 개 뽑아 아래의 규칙에 따라 이동하는 것을 1 번의 시행으로 본다.

<규칙>

(1) 흰 공을 뽑으면 실선을 따라 움직여 이웃한 점으로 이동한다.
(2) 검은 공을 뽑으면 점선을 따라 움직여 이웃한 점으로 이동한다.
(3) 뽑은 공은 색을 확인 한 후 주머니에 다시 넣는다.



[그림 2-1]

예를 들어, 3 번의 시행 후 아주가 점 C의 위치에 있게 되는 경우는

$$s_1 : A \to C \to A \to C,\ s_2 : A \to C \to D \to C,\ s_3 : A \to B \to A \to C,\ s_4 : A \to B \to D \to C$$

로 움직이는 네 가지의 경우 뿐 이다. 각 경우에 대해 그 사건이 일어날 확률을 구해보자. s_1의 경우는 주머니에서 흰 공을 연속해서 3 번 뽑아야 하므로, 이 경우의 확률은 $\frac{2^3}{5^3}$이다. s_2의 경우는 주머니에서 흰 공, 검은 공, 검은 공의 순서로 뽑는 경우이므로, 이 경우의 확률은 $\frac{2}{5} \times \frac{3^2}{5^2}$이다. 비슷하게, s_3와 s_4 경우의 확률도 각각 $\frac{3^2}{5^2} \times \frac{2}{5}$이다. 따라서 3 번의 시행 후 아주가 점 C의 위치에 있을 확률은 $\frac{2^3 + 3 \times 3^2 \times 2}{5^3} = \frac{62}{125}$이다.

(나) 네 점 A, B, C, D가 [그림 2-1]과 같이 배치되어 있고, A, C와 B, D는 각각 실선, A, B와 C, D는 각각 점선으로 연결되어 있다. 수리는 점 A의 위치에서 시작하여 아래의 규칙에 따라 이동한다. 주머니에는 붉은 공이 1 개, 흰 공이 2 개, 검은 공이 3 개 들어 있고, 매 시행마다 주머니에서 공을 임의로 1 개 뽑아 아래의 규칙에 따라 이동한다.

<규칙>

(1) 흰 공을 뽑으면 실선을 따라 움직여 이웃한 점으로 이동한다.
(2) 검은 공을 뽑으면 점선을 따라 움직여 이웃한 점으로 이동한다.
(3) 붉은 공을 뽑으면 대각선의 점으로 이동한다. 즉, 점 A의 위치에 있다면 점 D의 위치로 이동한다, 비슷하게 점 D의 위치에서 점 A의 위치로, 점 B의 위치에서 점 C의 위치로, 점 C의 위치에서 점 B의 위치로 이동한다.
(4) 뽑은 공은 색을 확인 한 후 주머니에 다시 넣는다.

[문제 2-1] (20점) 아래의 물음에 답하시오.

(1) 아주가 제시문 (가)의 <규칙>에 따라 이동한다. 5번 시행하는 동안 점 D를 지나지 않고 마지막에 점 A의 위치에 있을 확률을 p라 하고, 6번 시행하는 동안 점 D를 지나지 않고 마지막에 점 A의 위치에 있을 확률을 q라 하자. 이때 p와 q를 각각 구하시오.

(2) 아주가 제시문 (가)의 <규칙>에 따라 이동한다. $2n$번 시행하는 동안 점 C를 지난 횟수가 k이면 2^k만큼의 상금을 받는다. 만약 마지막에 점 D의 위치에 있거나 시행 도중에 점 D를 지나게 되는 경우에는 상금이 없다. 아주가 받을 수 있는 상금의 기댓값과 분산을 n에 대한 식으로 나타내시오.

[문제 2-2] (30점) 아래의 물음에 답하시오.

(1) 수리가 제시문 (나)의 <규칙>에 따라 이동한다. n번 시행하는 동안 실선이나 점선을 따라 이동하는 경우가 4번 이하일 확률을 p_n이라 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{6^n\ p_n}{n^4}$을 구하시오.

(2) 수리가 제시문 (나)의 <규칙>을 따라 이동한다. n번째 시행에서 처음으로 실선을 따라 이동할 확률을 q_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} q_n$의 값을 구하시오.

(3) 수리가 제시문 (나)의 <규칙>을 따라 이동한다. n번째 시행에서 처음으로 점 A의 위치에 돌아왔고 n번 시행하는 동안 실선을 따라 두 번 이하 이동했다고 하자. $n=6$일 때 수리가 이동할 수 있는 방법의 수를 x라 하고, $n=5$일 때 수리가 이동할 수 있는 방법의 수를 y라 할 때, x와 y를 각각 구하시오.