2020학년도 자연계열(오전) 채점기준

자연계열
(오전)

[문제 1-1] (25점)

(1) (5점)

(풀이1) 색칠되지 않은 칸에 적힌 수를 차례로 x, y, z라 두자.

5	x	y	z	13

<조건>을 만족해야하므로 $x=\frac{5+y}{2}$, $y=\frac{x+z}{2}$, $z=\frac{y+13}{2}$가 성립한다. **(2점)**

이 일차연립방정식을 풀면 $x=7$, $y=9$, $z=11$을 얻는다. **(3점)**

(풀이2) 색칠되지 않은 칸에 적힌 수를 A_1, A_2, A_3라 두고, $A_0=5$, $A_4=13$으로 두면, $i=1,2,3$ 에 대하여 A_i가 A_{i-1}과 A_{i+1}의 등차중항이 되고, 이로부터 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4가 등차수열임을 알 수 있다. **(2점)**
따라서 적힌 수는 차례로 $7, 9, 11$ 이다. **(3점)**

5	7	9	11	13

(2) **(9점)**

(1)에서의 (풀이2)과 같은 이유로 수열 $0, A_1, A_2, \ldots, A_{99}, 2020$ 는 등차수열이 된다. **(2점)**
이때 공차를 d로 두면 2020은 101번째 항이므로 $2020=100d$ 이다. **(4점)**
$d=\frac{101}{5}$ 이고 $A_{45}=45d=\frac{101}{5}\times 45=909$ 이다. **(3점)**

(3) **(11점)**

(1)에서의 (풀이2)과 같은 이유로 수열 $0, \ln B_1, \ln B_2, \ldots, \ln B_{n-1}, n$는 등차수열이 되어 $1\le i\le n-1$에 대하여 $\ln B_i = i$ 이다. **(2점)**
따라서 $B_i=e^i$이고 $1, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$는 등비수열이므로, B는 공비가 e인 등비수열의 합으로
$B=1+e+e^2+\ \cdots\ +e^{n-1}=\frac{e^n-1}{e-1}$이다. **(4점)**

$e>2$로부터 **(2점)**

$B<\frac{e^n}{e-1}<e^n$가 성립한다. 따라서 $y=\ln x$는 $x>0$에서 증가하므로 $\ln B<n$이다. **(3점)**

[문제 1-2] (25점)

(1) **(11점)**

색칠되지 않은 칸에 적히는 수 A는 색칠된 칸에 적힌 수의 평균이므로

$A=\frac{1}{n+1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}(4i^3+4i+10^4)\right)=\frac{1}{n+1}(1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n)$ **(2+2점)**

$A \le 10^4$ 이어야 하므로,

$$\frac{1}{n+1}(1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n) \le 10^4$$

이고, 양변에 $n+1$을 곱하면 $1+n^2(n+1)^2+2n(n+1)+10^4n \le 10^4n+10^4$ 이다. **(2점)**

양변에 10^4n을 빼주고, $t=n(n+1)$로 치환하면, $1+t^2+2t \le 10^4$이 되어, $(t+1)^2 \le 10^4$이다.

즉, $t \le 99$ 이므로, $n^2+n \le 99$이다. **(2점)**

이를 만족하는 가장 큰 양의 정수 n은 9이다. **(3점)**

(2) **(14점)**

가운데 적힌 수 A가 적혀 있는 가운데의 칸부터 2020이 적혀 있는 칸을 보면, [문제 2-1]과 같은 이유로, 수열 $A, x_1, x_2, \dots, x_{2019}, 2020$는 등차수열이 된다. **(2점)**

이 수열의 공차를 d라 한다면,

$$x_1=A+d, \quad x_2=A+2d, \quad 2020=A+2020d$$

이다. 즉, $A=2020-2020d$이고, **(4점)**

$x_2=A+2d=2020-1018d$가 된다. 제시문 (나)에서처럼 A는 세 수 x_2, 2020, -1의 평균이므로

$$2020-2020d = \frac{2020-2018d+2020+(-1)}{3}$$ **(4점)**

가 성립한다. 이를 풀면 $2021=4042d$, 즉 $d=\frac{1}{2}$이고,

$A=1010$이다. **(4점)**

[문제 2-1] (25점)

(1) **(8점)**

P의 x좌표를 p라 하자. 접선의 방정식을 구해보면 $y-(p^3+16)=3p^2(x-p)$ 이다. 이 접선이 원점을 지나므로, $p^3+16=3p^3$이고 $p=2$이다. **(2점)**

이때 $k=3p^2=12$이다. **(2점)**

이제 곡선 $y=x^3+16$과 직선 $y=17x$와의 교점을 구해보면, $x^3-17x+16=(x-1)(x^2+x-16)=0$이므로 **(2점)**

$x=1$, $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{1+64})$에서 해를 가진다. 교점 Q, R은 제1사분면의 점이므로 이 두 점의 x좌표는 양수이므로 두 점의 x좌표는 1과 $\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$이다. **(1점)**

따라서 P, Q, R의 x좌표의 곱은 $2\times1\times\frac{-1+\sqrt{65}}{2}=\sqrt{65}-1$ 이다. **(1점)**

(2) **(8점)**

두 직선 $y=(t+1)x$, $y=tx$가 x축과 이루는 각을 각각 α, β라 하자. 이때 $\tan\alpha=t+1$, $\tan\beta=t$이다. 따라서 $\tan\theta_t=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{t^2+t+1}$이고 $\cot\theta_t=t^2+t+1$ 이다.

한편, $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$가 성립하므로, $f(t)=\csc\theta_t=\sqrt{1+(t^2+t+1)^2}$이다. **(3+1점)**

따라서 $f(1)=\sqrt{10}$이고 **(1점)**

$f'(t)=\frac{(t^2+t+1)(2t+1)}{\sqrt{1+(t^2+t+1)^2}}$이므로, $f'(1)=\frac{9}{\sqrt{10}}=\frac{9}{10}\sqrt{10}$이다. **(2+1점)**

(3) **(9점)**

$f(\theta)=\int_0^\theta(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)dx$라 두자. 먼저 $f(0)=0$이므로 $C\geq 0$이다. **(2점)**

이때 $(\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)=\frac{\sin 2x}{2}+\sin 3x+\frac{\sin 4x}{2}$ 이므로, $f(\theta)$는

$$\int_0^\theta\left(\frac{\sin 2x}{2}+\sin 3x+\frac{\sin 4x}{2}\right)dx=\left(\frac{1}{4}-\frac{\cos 2\theta}{4}+\frac{1}{3}-\frac{\cos 3\theta}{3}+\frac{1}{8}-\frac{\cos 4\theta}{8}\right)$$

이다. **(3점)**

한편 $y=\cos x$의 함숫값은 항상 1이하 이므로, $f(\theta)\geq 0$이다. **(1점)**

따라서 $C=0$일 때 $C+f(\theta)\geq 0$을 만족한다. **(2점)**

따라서 가장 작은 C는 0이다. **(1점)**

[문제 2-2] (25점)

(1) **(12점)**

직선 $y=tx$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$의 제1사분면의 교점을 구하기 위해, $tx=\frac{1}{x}$라 두면, $x=\frac{1}{\sqrt{t}}$이다.

즉, P_t의 x좌표를 x_t라 두었으므로, $x_t=\frac{1}{\sqrt{t}}$이다. **(3점)**

한편, 제시문 (나)의 방법을 이용하면, $A(t)$는 정적분 $\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}dx$ 와 선분 OP_t를 빗변으로 하는 직각삼각형의 넓이의 합에서 선분 OP_{t+1}을 빗변으로 직각삼각형의 넓이를 빼면 된다. 선분 OP_t와 선분 OP_{t+1}을 빗변으로 직각삼각형의 넓이가 각각 $\frac{x_t\times\frac{1}{x_t}}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{x_{t+1}\times\frac{1}{x_{t+1}}}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로

$$A(t)=\left(\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\int_{x_{t+1}}^{x_t}\frac{1}{x}\,dx \quad \textbf{(3점)}$$

이다. 즉, $A(t)=\int_{\frac{1}{\sqrt{t+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{t}}}\frac{1}{x}\,dx=\ln\frac{1}{\sqrt{t}}-\ln\frac{1}{\sqrt{t+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t}$가 된다. **(3점)**

따라서 $\lim_{t\to\infty}tA(t)=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)^t=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$ 이다. **(3점)**

(2) **(13점)**

$f(x)=-\ln\cos x$라 두자. 직선 $y=tx$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표를 x_t라 두면 $-\ln\cos x_t=tx_t$가 성립한다. 한편, $s(t)=\int_0^{x_t}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$이고, **(2점)**

$f'(t)=\tan x$이므로, **(2점)**

주어진 x의 범위에서 $\sec x+\tan x>0$ 이므로,

$$s(t)=\int_0^{x_t}\sqrt{1+\tan^2 x}\,dx=\int_0^{x_t}\sec x\,dx=\ln(\sec x_t+\tan x_t) \quad \textbf{(2점)}$$

$$=\ln\left(\frac{1+\sin x_t}{\cos x_t}\right)=\ln(1+\sin x_t)-\ln(\cos x_t)$$

가 성립한다. $-\ln(\cos x_t)=tx_t$ 임을 이용하면, $s(t)=\ln(1+\sin x_t)+tx_t$ 가 성립한다. **(2점)**

한편, $t\to\infty$일 때 $x_t\to\frac{\pi}{2}$이므로, **(2점)**

$\lim_{t\to\infty}\frac{s(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\sin x_t)}{t}+x_t\right)=\frac{\pi}{2}$이다. **(3점)**