[문항 2] (50점) 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

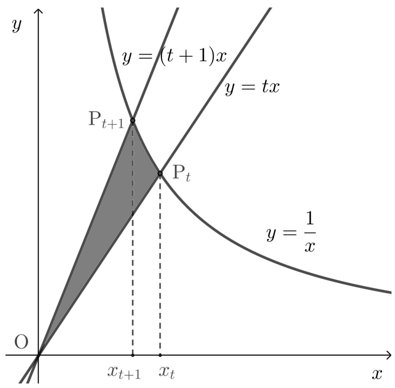
(가) 아래는 직선 $y=tx$ (단, $t>0$인 실수)와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제1사분면에서 만나서 생기는 모양에 대한 예시이다.

[예시 1]

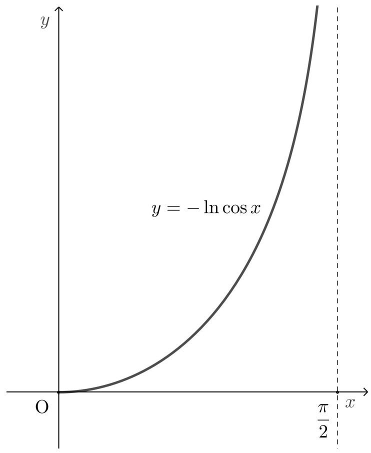
기울기가 양수인 직선 $y=tx$와 함수 $y=x^3+16$의 그래프의 교점을 살펴보자. 직선과 함수의 그래프의 교점을 구하기 위해 $x^3+16=tx$라 두자. 함수 $g(x)=x^3-tx+16$ 은 $g(0)=16>0$이고 삼차항의 계수가 양수이므로 삼차방정식 $g(x)=0$은 음수인 해가 존재한다. 따라서 방정식 $g(x)=0$의 양수인 해는 최대 두 개이고, 직선 $y=tx$는 함수 $y=x^3+16$의 그래프와 제1사분면에서 최대 두 번 만나게 된다.

[예시 2]

기울기가 양수인 직선 $y=tx$는 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프와 제1사분면에서 한 점 $\mathrm{P}_t(x_t,\, y_t)$ 에서 만난다. [그림 2-1]과 같이 두 직선 $y=(t+1)x$, $y=tx$와 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 으로 둘러싸인 제1사분면의 영역의 넓이를 $A(t)$라 하자. 이때 $A(t)$는 선분 OP_t와 선분 OP_{t+1}을 빗변으로 하는 직각삼각형들의 넓이를 이용하여 t에 대한 함수로 구할 수 있다.



[그림 2-1]



[그림 2-2]

(나) 함수 $y=\cos x$와 $y=-\ln x$의 그래프를 살펴보면, $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$인 구간에서 $y=\cos x$의 함숫값은 1에서 0으로 감소하며, $0<x\le 1$인 범위에서 $y=-\ln x$의 함숫값은 x가 0으로 가까이 갈 때 ∞로 발산한다. 따라서 $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$ 인 범위에서 함수 $y=-\ln\cos x$의 그래프를 그려보면 [그림 2-2]와 같다.

(다) $\sec x=\dfrac{\sec x\,(\tan x+\sec x)}{\tan x+\sec x}=\dfrac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\tan x+\sec x}$ 와 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ (단, C는 적분상수)를 사용하면 $\sec x$의 부정적분은 $\ln|\tan x+\sec x|+C$ (단, C는 적분상수)임을 알 수 있다.

[문제 2-1] (25점) 아래의 물음에 답하시오.

(1) 제시문 (가)의 [예시 1]에서 함수 $y=x^3+16$ 의 그래프는 제1사분면에서 기울기가 양수인 직선 $y=kx$와 한 점 P에서 만나고, 직선 $y=(k+5)x$ 와는 두 점 Q, R에서 만난다. 세 점 P, Q, R의 x 좌표의 곱과 k를 각각 구하시오.

(2) 기울기가 양수인 두 직선 $y=tx$와 $y=(t+1)x$가 이루는 각 중 예각인 것을 θ_t라 하고, $f(t)=\csc\theta_t$라 하자. 이때 $f(1)$의 값과 $f'(1)$의 값을 각각 구하시오.

(3) 모든 $\theta \geq 0$에 대하여 $C+\int_0^\theta (\sin x+\sin 2x)(\cos x+\cos 2x)\,dx \geq 0$을 만족하는 가장 작은 상수 C의 값을 구하시오.

[문제 2-2] (25점) 아래의 물음에 답하시오.

(1) 제시문 (가)의 [예시 2]와 같이 기울기가 양수인 두 직선 $y=(t+1)x$, $y=tx$와 곡선 $y=\frac{1}{x}$로 둘러싸인 영역 중 제1사분면에 있는 영역의 넓이를 $A(t)$라 하자. 이때 $\lim_{t\to\infty} tA(t)$를 구하시오.

(2) 제시문 (나)에 주어진 함수 $y=-\ln\cos x$ $(0 \leq x < \frac{\pi}{2})$의 그래프와 직선 $y=tx$와의 원점이 아닌 교점을 $\mathrm{P}_t(x_t, y_t)$라 하자. 곡선 $y=-\ln\cos x$에 대하여 $x=0$에서 $x=x_t$까지 곡선의 길이를 $s(t)$라 하자. 제시문 (다)를 참고하여 $\lim_{t\to\infty}\frac{s(t)}{t}$를 구하시오.