

수학 영역

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도교육청 주관
으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정답

1	③	2	②	3	①	4	⑤	5	④
6	③	7	②	8	④	9	⑤	10	①
11	③	12	①	13	②	14	④	15	①
16	7	17	38	18	12	19	24	20	213
21	320	22	26						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$5^{-\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}} \times (5^2)^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 5$$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 9$$

3. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 계산하기

$$\sum_{k=1}^5 (k + 3a_k) = \sum_{k=1}^5 k + 3 \sum_{k=1}^5 a_k$$

$$= \frac{5 \times 6}{2} + 3 \sum_{k=1}^5 a_k = 27$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k = 27 - 15 = 12$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 a_k = 4$$

4. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서
연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x + a) = 2 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - ax + 11) = 12 - a$$

$$f(1) = 12 - a$$

$$2 + a = 12 - a, \quad 2a = 10$$

$$\text{따라서 } a = 5$$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$$g'(x) = (2x + 2)f'(x) + (x^2 + 2x)f''(x)$$

$$g'(1) = 4f'(1) + 3f''(1) = 4 \times 2 + 3 \times 1 = 11$$

6. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log_{\sqrt{a}} b = 6 \text{ 에서 } b = (\sqrt{a})^6 = a^3$$

$$\log_4 a + \log_2 b = \log_4 a + \log_4 b^2$$

$$= \log_4 ab^2$$

$$= \log_4 a(a^3)^2$$

$$= \log_4 a^7$$

$$= 7 \log_4 a = 14$$

$$\log_4 a = 2, \quad a = 4^2 = 16, \quad b = 16^3$$

$$\log_2 \frac{b}{a} = \log_2 \frac{16^3}{16} = \log_2 16^2 = \log_2 2^8 = 8$$

7. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$$\int_0^2 f(x) dx - \int_0^{-2} f(x) dx$$

$$= \int_0^2 f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{40}{3}$$

$$\int_{-2}^2 (x^3 + x^2 + a) dx = 2 \int_0^2 (x^2 + a) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + ax \right]_0^2$$

$$= \frac{16}{3} + 4a$$

$$\frac{16}{3} + 4a = \frac{40}{3}, \quad 4a = 8$$

$$\text{따라서 } a = 2$$

8. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \text{ 이므로}$$

$$2 \cos \theta + \sin \theta = 0$$

$$2 \cos \theta = -\sin \theta \quad \text{㉠}$$

$$4 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$4 \cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\sin \theta < 0 \text{ 이므로}$$

$$\text{㉠에 의하여 } \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

9. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

$$f'(x) = 6x^2 - 14x$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의

점 $(t, f(t))$ ($t > 0$) 에서의 접선의 방정식은

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

$$y = (6t^2 - 14t)(x - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$$

접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = (6t^2 - 14t)(0 - t) + 2t^3 - 7t^2 + 1$$

$$1 = -4t^3 + 7t^2 + 1$$

$$4t^3 - 7t^2 = t^2(4t - 7) = 0$$

$$\text{따라서 } t = \frac{7}{4}$$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 활용하여
문제 해결하기

$$\text{함수 } y = \cos \frac{\pi x}{a} \text{ 의 주기는 } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}} = 2a$$

$$0 \leq x \leq 2a \text{ 에서 } \cos \frac{\pi x}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{a} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi x}{a} = \frac{5\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{a}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}a$$

$$\text{점 A 의 좌표는 } \left(\frac{a}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{점 B 의 좌표는 } \left(\frac{5}{3}a, \frac{1}{2}\right)$$

$$0 \leq x \leq 2a \text{ 에서 } \cos \frac{\pi x}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi x}{a} = \frac{2\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{\pi x}{a} = \frac{4\pi}{3} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{2}{3}a \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}a$$

$$\text{점 C 의 좌표는 } \left(\frac{2}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{점 D 의 좌표는 } \left(\frac{4}{3}a, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{AB} = \frac{4}{3}a, \quad \overline{CD} = \frac{2}{3}a$$

사각형 ACDB 는 사다리꼴이므로

사각형 ACDB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}a + \frac{2}{3}a\right) \times 1 = a = \frac{3}{2}$$

$$\overline{AB} = \frac{4}{3}a = 2$$

$$\text{따라서 } a \times \overline{AB} = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

11. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리
문제 해결하기

시각이 t ($t \geq 0$) 일 때

점 P 의 위치를 $x(t)$ 라 하면 $x(0) = 0$

$$\neg. k=0 \text{ 이면, } v(t) = 3t^2 - 6t$$

$$x(1) = x(0) + \int_0^1 v(t) dt$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 6t) dt$$

$$= \left[t^3 - 3t^2\right]_0^1 = -2 \quad (\text{참})$$

$$\neg. k=2 \text{ 이면, } v(t) = 3t^2 - 6t + 2$$

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인

거리와 점 P 의 위치의 변화량이 같아지려면

$0 \leq t \leq 3$ 인 모든 t 에 대하여

$$v(t) \geq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$v(1) = -1 \text{ 이므로}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인

거리는 점 P 의 위치의 변화량과 같지 않다.

(거짓)

$$\neg. k=-9 \text{ 이면, } v(t) = 3t^2 - 6t - 9$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3) \text{ 이므로}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P 가 움직인

거리는

$$\int_0^4 |v(t)| dt$$

$$= \int_0^3 (-3t^2 + 6t + 9) dt + \int_3^4 (3t^2 - 6t - 9) dt$$

$$= \left[-t^3 + 3t^2 + 9t\right]_0^3 + \left[t^3 - 3t^2 - 9t\right]_3^4$$

$$= 27 + 7 = 34 \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$

12. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제
해결하기

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + a - 1 & (x \leq -1) \\ \frac{2}{3}x^3 + ax^2 & (x > -1) \end{cases}$$

$$h'(x) = \begin{cases} -x^2 & (x < -1) \\ 2x^2 + 2ax & (x > -1) \end{cases}$$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로

$$a < 0 \quad \text{㉔}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=-1$, $x=-a$ 에서 극소이므로
 $\alpha = -1$, $\beta = -a$

$$h(\alpha) = h(-1) = \frac{1}{3} + a - 1 = a - \frac{2}{3}$$

$$h(\beta) = h(-a) = \frac{1}{3}a^3$$

$$h(\alpha) \geq h(\beta), \quad a - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{3}a^3$$

$$(a-1)^2(a+2) \leq 0$$

$$a=1 \text{ 또는 } a \leq -2 \quad \text{㉕}$$

㉔, ㉕, ㉕에 의하여 $-3 \leq a \leq -2$

$$b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$a+b = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{3}{2} \times (-2) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$m = \frac{3}{2} \times (-3) - \frac{1}{2} = -5$$

$$\text{따라서 } M-m = -\frac{7}{2} - (-5) = \frac{3}{2}$$

16. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = \frac{a_1}{1} + 4 = 6$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + 4 = 7$$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$$F(x) = \int f(x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 4) dx$$

$$= x^3 + 4x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$F(0) + F(2) = C + (16 + C) = 14$$

$$C = -1$$

$$F(x) = x^3 + 4x - 1$$

$$\text{따라서 } F(3) = 27 + 12 - 1 = 38$$

18. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수는 양수이므로

$$x+4 > 0, \quad x-2 > 0$$

$$x > 2 \quad \text{㉖}$$

$$\log_3(x+4) \leq 3 + \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

$$\log_3(x+4) - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \leq 3$$

$$\log_3(x+4) + \log_3(x-2) \leq 3$$

$$\log_3(x+4)(x-2) \leq \log_3 27$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$(x+4)(x-2) \leq 27$$

$$x^2 + 2x - 35 \leq 0$$

$$(x-5)(x+7) \leq 0$$

$$-7 \leq x \leq 5 \quad \text{㉗}$$

㉖, ㉗에 의하여

$$2 < x \leq 5 \text{ 이므로}$$

정수 x 의 값은 3, 4, 5

따라서 구하는 모든 정수 x 의 값의 합은 12

19. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

단한구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	k	$\searrow$	$k-16$	$\nearrow$	$k-9$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 k 를 갖고,

$x=2$ 에서 극소이면서 최솟값 $k-16$ 을 갖는다.

$$f(0) = k = 40 \text{ 이므로}$$

$$k = 40$$

따라서 단한구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = k - 16 = 24$

20. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$\text{자연수 } n \text{에 대하여 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \dots \dots \text{㉘}$$

수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

(i) $n = 2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

㉘에 의하여

$$b_{2k-1} = 2 \times \left\{ \frac{(2k-1)(a_1 + a_{2k-1})}{2} - (2k-1)a_{2k-1} \right\}$$

$$= (2k-1)(a_1 + a_{2k-1}) - 2(2k-1)a_{2k-1}$$

$$= (2k-1) \times (a_1 - a_{2k-1})$$

(ii) $n = 2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$b_{2k} = (2k-1)a_{2k}$$

$$b_2 = (2-1)a_2 = a_2 = 2$$

(i), (ii)에 의하여

$$\begin{aligned} b_{2k-1} + b_{2k} &= ((2k-1)) \times (a_1 - a_{2k-1}) + (2k-1)a_{2k} \\ &= (2k-1) \times \{a_1 + (a_{2k} - a_{2k-1})\} \\ &= (2k-1) \times (a_1 + d) \\ &= (2k-1) \times a_2 \\ &= (4k-2) \quad \dots \dots \text{㉙} \end{aligned}$$

이다.

㉙에 의하여

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} b_n &= (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{19} + b_{20}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (b_{2k-1} + b_{2k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} (4k-2) \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 \times 10 \\ &= 200 \end{aligned}$$

이다.

$$f(k) = 2k-1, \quad g(k) = 4k-2, \quad p = 200$$

$$\text{따라서 } f(2) + g(3) + p = 3 + 10 + 200 = 213$$

21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 함수 추론하기

조건 (가)에서 $\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 6$ 이므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표는

$$x = a, \quad x = b, \quad x = 4 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a < 4 \leq \frac{3}{2}a, \quad b > \frac{3}{2}a \text{ 또는}$$

$$a < 4 \leq \frac{3}{2}a, \quad b < a$$

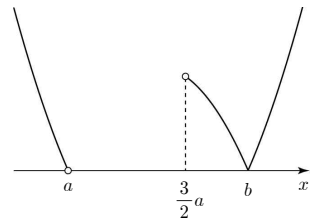
$$4 = \frac{3}{2}a \text{ 이면 } \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 5 \text{ 이므로}$$

$$4 < \frac{3}{2}a \text{ 이어야 한다.}$$

$$(I) \quad a < 4 < \frac{3}{2}a, \quad b > \frac{3}{2}a \text{ 인 경우}$$

$$x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a \text{ 에서}$$

함수 $y = |(x-a)(x-b)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 양의 실수 m 에 대하여

$$x < a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}a \text{ 에서}$$

직선 $y = m$ 과

함수 $y = |(x-a)(x-b)|$ 의 그래프가

만나는 서로 다른 점의 개수는

2 이상이므로

$$\lim_{t \rightarrow m+} g(t) \geq 2 \text{ 이다.}$$

그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(II) \quad a < 4 < \frac{3}{2}a, \quad b < a \text{ 인 경우}$$

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| = \left| \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - 4 \right) \right| = \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - 4 \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| &= \left| \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - b \right) \right| \\ &= \frac{a}{2} \left(\frac{3}{2}a - b \right) \end{aligned}$$

$b < 4$ 이므로

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| < \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| \text{ 이다.}$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}a+} |f(x)| = k_1$ 이라 하면

$$\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \geq k_1 \text{ 또는}$$

$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \geq k_1 \text{ 일 때}$$

모든 양의 실수 m 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow m+} g(t) \geq 2 \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$\text{그러므로 } \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| < k_1 \text{ 이고,}$$

$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| < k_1 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{t \rightarrow k_1-} g(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow k_1+} g(t) = 2 \text{ 이므로}$$

함수 $g(t)$ 는 $t = k_1$ 에서 불연속이다.

조건 (나)에 의하여 $\beta = k_1$ 이다.

(I), (II)에 의하여

$$b < a < 4 < \frac{3}{2}a, \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| < \beta,$$

$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| < \beta, \quad \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| < \beta$$

함수 $g(t)$ 는 $t = \alpha, t = \beta$ 에서만 불연속이므로
다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

$$(i) \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \text{인 경우}$$

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right|, \quad t = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right|,$$

$t = \beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(ii) \quad \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{인 경우}$$

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right|, \quad t = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|,$$

$t = \beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(iii) \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| \neq \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{인 경우}$$

함수 $g(t)$ 가

$$t = \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right|, \quad t = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right|,$$

$t = \beta$ 에서 불연속이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(iv) \quad \left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{인}$$

경우

$$\left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| = k_2 \text{ 라 하면}$$

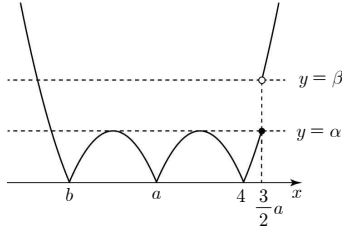
$$\lim_{t \rightarrow k_2-} g(t) = 6, \quad \lim_{t \rightarrow k_2+} g(t) = 1 \text{ 이므로}$$

함수 $g(t)$ 는 $t = k_2, t = \beta$ 에서만

불연속이다.

(i) ~ (iv)에 의하여 $\alpha = k_2$ 이다.

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{3}{2}a\right) \right| \text{ 이므로}$$

$$\frac{(a-4)^2}{4} = \frac{a(3a-8)}{4}$$

$$a^2 - 8a + 16 = 3a^2 - 8a, \quad a^2 = 8$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 2\sqrt{2}$$

$$\left| f\left(\frac{b+a}{2}\right) \right| = \left| f\left(\frac{a+4}{2}\right) \right| \text{ 이므로}$$

$$\frac{(a-b)^2}{4} = \frac{(4-a)^2}{4}$$

$$b < a < 4 \text{ 이므로 } a-b = 4-a$$

$$b = 2a-4 = 4\sqrt{2}-4$$

$$f(0) = ab = 2\sqrt{2}(4\sqrt{2}-4) = 16-8\sqrt{2}$$

$$p = 16, \quad q = -8$$

$$\text{따라서 } p^2 + q^2 = 256 + 64 = 320$$

22. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$$f(x) = 2^{x-m} + n,$$

$$g(x) = \log_2(x-n+1) + m - 7 \text{ 이라 하자.}$$

점 A(a, b)는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$0 < a < b$$

점 B는 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이동한 점이므로 B(b, a)이고,

곡선 $y = \log_2(x-n)+m$ 위의 점이다.

곡선 $y = g(x)$ 는 곡선 $y = \log_2(x-n)+m$ 을

x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로

-7 만큼 평행이동한 곡선과 일치한다.

점 B를 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 점을

B'(b-1, a-7)이라 하면

점 B'은 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이다.

점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 인

원을 C라 하자.

$$BB' = 5\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

점 B'은 원 C 위의 점이다.

원 C와 곡선 $y = g(x)$ 가 만나는 두 점을

C(x₁, y₁), D(x₂, y₂)라 하면 $x_1 < x_2$ 이고

함수 $g(x)$ 는 $x > n-1$ 인 실수 전체의 집합에서

증가하므로 $y_1 < y_2$

점 B'은 원 C와 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로

점 B'은 점 C와 일치하거나 점 D와 일치한다.

점 B'이 점 D와 일치하는 경우

$$x_1 < b-1, \quad y_1 < a-7$$

$$b-x_1 > 1, \quad a-y_1 > 7$$

$$BC = \sqrt{(b-x_1)^2 + (a-y_1)^2} > 5\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

점 C가 원 C 위의 점이라는 조건에 모순이다.

그러므로 점 B'은 점 C와 일치한다.

조건 (가)에 의하여

직선 AC의 기울기는

$$\frac{a-7-b}{b-1-a} = -3$$

$$a-7-b = -3(b-1-a)$$

$$a-b = -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -x + a + b \text{ 이므로}$$

두 점 O, C와 직선 $x+y-a-b=0$ 사이의

거리를 각각 h_1, h_2 라 하면

$$h_1 = \frac{|-a-b|}{\sqrt{2}} = \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$$

$$h_2 = \frac{|(b-1)+(a-7)-a-b|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{삼각형 AOB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_1 \text{ 이고}$$

$$\text{삼각형 ACB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_2 \text{ 이므로}$$

삼각형 AOB와 삼각형 ACB의 넓이의 비는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_1 : \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h_2 = 27 : 8$$

$$8h_1 = 27h_2$$

$$8 \times \frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} = 27 \times 4\sqrt{2}$$

$$a+b = 27 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여 $a = 11, b = 16$

점 A(11, 16)은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$2^{11-m} + n = 16$$

위 식을 만족시키는

두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 은

$(8, 8), (9, 12), (10, 14), (11, 15)$ 이다.

따라서 $m+n$ 의 최댓값은 $11+15 = 26$

기하 정답

23	①	24	②	25	⑤	26	④	27	③
28	⑤	29	216	30	52				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 합 계산하기

$\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 1)$ 에 대하여
 $\vec{a} + \vec{b} = (3, 1) + (-2, 1) = (1, 2)$ 이므로
 모든 성분의 합은 3

24. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기

점 $(a, 4)$ 가 포물선 $y^2 = 4(x-3)$ 위의
 점이므로 $4^2 = 4(a-3)$, $a = 7$
 포물선 $y^2 = 4(x-3)$ 은 포물선 $y^2 = 4x$ 를
 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로
 준선의 방정식은 $x = -1 + 3 = 2$
 따라서 점 $(7, 4)$ 와 준선 사이의 거리는
 $|7-2| = 5$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

점 $(3\sqrt{2}, 0)$ 을 지나고 방향벡터가
 $\vec{u} = (1, 2\sqrt{2})$ 인 직선의 방정식은
 $\frac{x-3\sqrt{2}}{1} = \frac{y}{2\sqrt{2}}$ 이므로
 $2\sqrt{2}x - y - 12 = 0$
 원점 O와 직선 $2\sqrt{2}x - y - 12 = 0$ 사이의
 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{3} = 4 \text{ 이므로}$$

$$|\vec{OP}| \geq 4$$

따라서 $|\vec{OP}|$ 의 최솟값은 4

26. [출제의도] 타원의 점선의 방정식 이해하기

타원 위의 점 $P(6, b)$ ($b > 0$)에서의
 점선의 방정식은
 $\frac{6x}{48} + \frac{by}{4b^2} = 1$, $y = -\frac{b}{2}x + 4b$
 점 A의 좌표는 $(8, 0)$, 점 B의 좌표는 $(0, 4b)$
 $\overline{AB} = \sqrt{8^2 + (4b)^2} = \sqrt{64 + 16b^2}$ 이고
 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$ 이므로
 $64 + 16b^2 = 192$, $b = 2\sqrt{2}$
 $c^2 = 48 - 4b^2$ 이므로 $c = 4$
 따라서 $b^2 \times c = (2\sqrt{2})^2 \times 4 = 32$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기

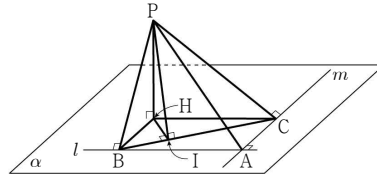
점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PB} \perp \overline{AB}$ 이므로
 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HB} \perp \overline{AB}$
 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PC} \perp \overline{AC}$ 이므로
 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HC} \perp \overline{AC}$
 $\overline{HB} \perp \overline{AB}$, $\overline{HC} \perp \overline{AC}$ 이므로
 사각형 ACHB는 직사각형이다.
 $\overline{AH} = \overline{BC} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$

$\overline{AH} = 4$ 이고 $\overline{PA} = 5$ 이므로

삼각형 PHA에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.



삼각형 HBC에서

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \text{ 이므로 } \overline{HI} = \sqrt{3}$$

삼각형 PHI에서

$$\overline{PI} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HI}^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HI} \perp \overline{BC}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI} \perp \overline{BC}$

$\overline{PI} \perp \overline{BC}$, $\overline{HI} \perp \overline{BC}$ 이므로

평면 α 와 평면 PBC가 이루는 각의 크기는
 두 직선 HI와 PI가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\cos(\angle PIH) = \frac{\overline{HI}}{\overline{PI}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC의 평면 PBC 위로의
 정사영의 넓이는

$$2\sqrt{3} \times \cos(\angle PIH) = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

28. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 문제 해결하기

$\overline{PA} \cdot \overline{PQ} = |\overline{PQ}|^2$ 에서

두 벡터 $\overline{PA}$ 와 $\overline{PQ}$ 가 이루는 각의 크기를

t ($0 \leq t \leq \pi$)라 하면

$$\overline{PA} \cdot \overline{PQ} = |\overline{PA}| \times |\overline{PQ}| \times \cos t = |\overline{PQ}|^2$$

이므로 $\angle PQA = \frac{\pi}{2} \dots \textcircled{1}$

$10\overline{BQ} = 2\overline{BA} + 3\overline{AD}$ 에서 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 이므로

$$10\overline{BQ} = 2\overline{BA} + 3\overline{BC}$$

$$2\overline{BQ} = \frac{2\overline{BA} + 3\overline{BC}}{5}$$

선분 AC를 3:2로 내분하는 점을 E라 하면

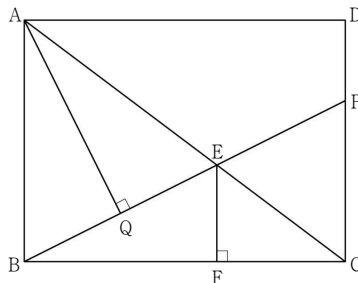
$$2\overline{BQ} = \overline{BE}$$

점 Q는 선분 BE의 중점이다.

$\overline{AC} = 10$ 이고 $\overline{AE} = 6$ 이므로

삼각형 ABE는 $\overline{AB} = \overline{AE}$ 인 이등변삼각형이다.

그러므로 $\overline{AQ} \perp \overline{BQ}$



①에 의하여 세 점 B, Q, P는 한 직선 위에 있다.
 점 E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 F라 하면
 두 삼각형 ABC와 EFC는 서로 닮음이고
 닮음비가 5:2이므로

$$\overline{EF} = \frac{2}{5} \times \overline{AB} = \frac{12}{5}$$

$$\overline{FC} = \frac{2}{5} \times \overline{BC} = \frac{16}{5}$$

$$\overline{BF} = \overline{BC} - \overline{FC} = \frac{24}{5}$$

$$\overline{BE} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{EF}^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ 이므로}$$

$$\overline{BQ} = \frac{1}{2} \times \overline{BE} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

두 삼각형 BFE와 BCP는 서로 닮음이고
 닮음비가 3:5이므로

$$\overline{BP} = \frac{5}{3} \times \overline{BE} = 4\sqrt{5}$$

$$\overline{PQ} = \overline{BP} - \overline{BQ} = 4\sqrt{5} - \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$(\overline{AR} + \overline{QR}) \cdot (\overline{PR} + \overline{QR}) = 0$ 에서

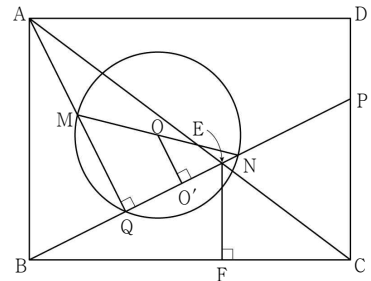
$$\left(\frac{\overline{AR} + \overline{QR}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\overline{PR} + \overline{QR}}{2} \right) = 0 \text{ 이므로}$$

선분 AQ의 중점을 M,

선분 PQ의 중점을 N이라 하면

점 R은 두 점 M과 N을 지름의 양 끝점으로
 하는 원 위의 점이다.

이 원의 중심을 O, 점 O에서 선분 BP에 내린
 수선의 발을 O'이라 하자.



$$\overline{BR} \cdot \overline{QP} = (\overline{BO} + \overline{OR}) \cdot \overline{QP}$$

$$= \overline{BO} \cdot \overline{QP} + \overline{OR} \cdot \overline{QP}$$

$$\overline{BO} \cdot \overline{QP} = |\overline{BO'}| \times |\overline{QP}|$$

$$\overline{BO'} = \overline{BQ} + \overline{QO'} = \overline{BQ} + \frac{1}{2} \times \overline{NQ}$$

$$\overline{NQ} = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BO'} = \overline{BQ} + \frac{1}{2} \times \overline{NQ}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{5} + \frac{7\sqrt{5}}{10} = \frac{19\sqrt{5}}{10}$$

$$\overline{BO} \cdot \overline{QP} = |\overline{BO'}| \times |\overline{QP}|$$

$$= \frac{19\sqrt{5}}{10} \times \frac{14\sqrt{5}}{5} = \frac{133}{5} \dots \textcircled{2}$$

두 벡터 $\overline{OR}$ 과 $\overline{QP}$ 가 이루는 각의 크기를

θ ($0 \leq \theta \leq \pi$)라 하면

$$\overline{OR} \cdot \overline{QP} = |\overline{OR}| \times |\overline{QP}| \times \cos \theta$$

$$|\overline{OR}| = \frac{1}{2} \times \overline{MN}$$

삼각형 AQB에서

$$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BQ}^2}$$

$$= \sqrt{6^2 - \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{MQ} = \frac{1}{2} \times \overline{AQ} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 MQN에서

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{MQ}^2 + \overline{NQ}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{17}$$

$$|\overline{OR}| = \frac{1}{2} \times \overline{MN} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\overline{OR} \cdot \overline{QP} = |\overline{OR}| \times |\overline{QP}| \times \cos \theta$$

$$= \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{14\sqrt{5}}{5} \times \cos \theta$$

$$= \frac{7\sqrt{85}}{5} \cos \theta$$

$\overline{OR} \cdot \overline{QP}$ 의 최댓값은

$\theta = 0$ 일 때, $\frac{7\sqrt{85}}{5}$... ㉔

$\overline{OR} \cdot \overline{QP}$ 의 최솟값은

$\theta = \pi$ 일 때, $-\frac{7\sqrt{85}}{5}$... ㉕

㉔, ㉔, ㉕에 의하여

$\overline{BR} \cdot \overline{QP}$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은

$$M = \frac{133 + 7\sqrt{85}}{5}, m = \frac{133 - 7\sqrt{85}}{5}$$

따라서

$$M + m = \frac{133 + 7\sqrt{85}}{5} + \frac{133 - 7\sqrt{85}}{5} = \frac{266}{5}$$

29. [출제의도] 포물선과 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기

포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ 이므로
포물선 위의 점 P의 좌표를 (m, n)
($m > 0, n > 0$)이라 하면 $n^2 = 4pm$
점 P에서 직선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을
P'이라 하면
포물선의 정의에 의하여 $\overline{PP'} = \overline{PF}$ 이므로
 $\overline{PF} = p + m$
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하면
 $\overline{SF} = p - m$
 $\cos(\angle PFF') = \frac{1}{5}$ 이므로
 $\frac{\overline{SF}}{\overline{PF}} = \frac{p-m}{p+m} = \frac{1}{5}, m = \frac{2}{3}p$
 $\overline{SF} = \frac{p}{3}$ 이므로
 $\overline{PS} = \sqrt{\overline{PF}^2 - \overline{SF}^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}p$
 $\overline{F'S} = \frac{5}{3}p$ 이므로
 $\overline{PF'} = \sqrt{\overline{PS}^2 + \overline{F'S}^2} = \frac{7}{3}p$
 $\overline{F'P} : \overline{F'R} = \overline{F'F} : \overline{F'O} = 2 : 1$ 이므로
두 삼각형 $PF'F$ 와 $RF'O$ 는 서로 닮음이다.
 $\overline{RF'} = \frac{1}{2} \times \overline{PF'} = \frac{7}{6}p$
쌍곡선의 주축의 길이를 $2a$ 라 하면
쌍곡선의 정의에 의하여
 $\overline{RF'} - \overline{RO} = \overline{QO} - \overline{QF'} = 2a$
삼각형 QOR의 둘레의 길이는

$$\overline{RQ} + \overline{QO} + \overline{RO} = (\overline{RF'} - \overline{QF'}) + \overline{QO} + \overline{RO}$$

$$= \overline{RF'} + (\overline{QO} - \overline{QF'}) + \overline{RO}$$

$$= \overline{RF'} + (\overline{RF'} - \overline{RO}) + \overline{RO}$$

$$= 2\overline{RF'} = 14 \text{ 이므로}$$

$$\overline{RF'} = 7$$

그러므로 $\frac{7}{6}p = 7, p = 6$

$$\overline{F'O} = p = 6, \overline{PS} = \frac{2\sqrt{6}}{3}p = 4\sqrt{6} \text{ 이고}$$

삼각형 PRO의 넓이는

삼각형 PF'O의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$S = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{F'O} \times \overline{PS}\right) = 6\sqrt{6}$$

따라서 $S^2 = 216$

30. [출제의도] 정사영의 성질을 활용하여 추론하기

$$\angle ADB = \frac{\pi}{2}, \overline{AB} = 10\sqrt{5}, \overline{AD} = 10 \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} = 20$$

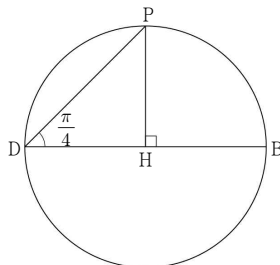
점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면
조건 (가)에 의하여 네 점 P, D, H, B는
한 평면 위에 있다.

$\overline{PH} \perp \alpha, \overline{BD} \perp \overline{AD}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PD} \perp \overline{AD}$
구 S와 평면 PBD가 만나는 교선은
선분 BD가 지름인 원이고

조건 (나)에 의하여 $\angle PDH = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overline{DH} = \overline{PH} = \overline{BH} = 10 \text{ 이고 } \overline{PB} = 10\sqrt{2}$$

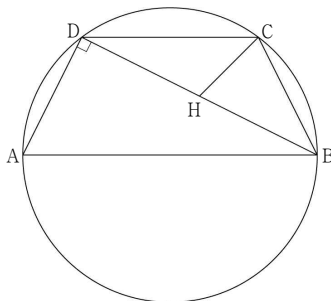


삼각형 BDA는 직각삼각형이므로

$$\cos(\angle DAB) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

사각형 ABCD가 등변사다리꼴이므로

$$\overline{CD} = 10\sqrt{5} - 2 \times \overline{AD} \times \cos(\angle DAB) = 6\sqrt{5}$$



$\angle BDC = \angle ABD$ 이므로

$$\cos(\angle BDC) = \cos(\angle ABD) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 DHC에서

$$\overline{CH}^2$$

$$= \overline{DH}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \times \overline{DH} \times \overline{DC} \times \cos(\angle HDC)$$

$$= 10^2 + (6\sqrt{5})^2 - 2 \times 10 \times 6\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 40$$

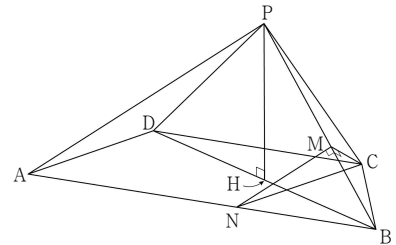
$$\overline{CH} = 2\sqrt{10}$$

삼각형 PHC에서

$$\overline{PC} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{CH}^2}$$

$$= \sqrt{10^2 + (2\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{35}$$

점 C에서 선분 PB에 내린 수선의 발을 M,
점 M을 지나고 선분 PB에 수직인 직선이
선분 AB와 만나는 점을 N이라 하자.



평면 PAB와 평면 PBC가 이루는 각의 크기는
두 직선 MN과 MC가 이루는 각의 크기와
같다.

삼각형 PBC에서

$$\overline{PC}^2 - (\overline{PB} - \overline{MB})^2 = \overline{BC}^2 - \overline{MB}^2$$

$$(2\sqrt{35})^2 - (10\sqrt{2} - \overline{MB})^2 = 10^2 - \overline{MB}^2$$

$$\overline{MB} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{MB}^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17}$$

점 P가 구 S 위의 점이므로 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$

두 삼각형 BPA와 BMN은
서로 닮음이고 닮음비가 5:2이다.

$$\overline{NB} = \frac{2}{5} \times \overline{AB} = 4\sqrt{5} \text{ 이고 } \overline{AN} = 6\sqrt{5}$$

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2}$$

$$= \sqrt{(10\sqrt{5})^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{3}$$

$$\overline{NM} = \frac{2}{5} \times \overline{AP} = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{AN} = \overline{CD} = 6\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

사각형 ANCD는 평행사변형이다.

$$\text{그러므로 } \overline{CN} = \overline{AD} = 10$$

삼각형 CMN에서

$$\cos(\angle NMC) = \frac{\overline{NM}^2 + \overline{CM}^2 - \overline{CN}^2}{2 \times \overline{NM} \times \overline{CM}}$$

$$= \frac{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{17})^2 - 10^2}{2 \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{17}}$$

$$= \frac{\sqrt{51}}{51}$$

$$\cos^2 \theta = \cos^2(\angle NMC) = \frac{1}{51}$$

$$p = 51, q = 1$$

따라서 $p + q = 52$