2007학년도 9월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	④	2	①	3	②	4	②	5	③	6	③
7	①	8	③	9	④	10	①	11	⑤	12	⑤
13	④	14	②	15	②	16	①	17	②	18	③
19	③	20	⑤	21	⑤	22	103	23	12	24	27
25	131	26	17	27	16	28	15	29	195	30	648

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(2^2\times 3)^3\times 2^{-4}\times 3^{-2}=2^6\times 3^3\times 2^{-4}\times 3^{-2}$

$=2^2\times 3=12$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈과 곱셈을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$AB=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$이므로

$AB(A+B)=E(A+B)=A+B=\begin{pmatrix}-1&6\\2&1\end{pmatrix}$

3. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}+2^n}{2^{2n+2}+2^n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 2^{2n}+2^n}{4\cdot 2^{2n}+2^n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{2^n}}{4+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{2n}}}=\dfrac{1}{2}$

4. [출제의도] 등차수열의 첫째항과 공차를 구하고 항의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=a+5d=5$ …㉠

$a_{11}=a+10d=3$…㉡

㉠, ㉡에서 $a=7,\ d=-\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ a_{21}=a+20d=7+20\cdot(-\dfrac{2}{5})=-1$

5. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 상용로그의 가수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log 20=1+\log 2\quad\therefore\ \alpha=\log 2$

$\log 300=2+\log 3\quad\therefore\ \beta=\log 3$

$\log 1200=\log 1.2\times 10^3=3+\log 1.2$이므로

$\log 1200$의 가수는

$\log 1.2=\log\dfrac{2^2\times 3}{10}=2\log 2+\log 3-1$

$=2\alpha+\beta-1$

6. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha^2\quad\therefore$ 참

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}2a_n=\alpha+\beta$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\quad\therefore$ 참

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n,\ b_n=(-1)^{n+1}$이면

$\{a_n\},\ \{b_n\}$은 모두 발산하지만

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}=-1\quad\therefore$ 거짓

7. [출제의도] 도형에 관련된 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{1+n^2}$

직각삼각형 ABC의 넓이를 S_n이라 하면

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot n=\dfrac{1}{2}n$

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot r_n+\dfrac{1}{2}\cdot n\cdot r_n+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1+n^2}\cdot r_n$

$\dfrac{1}{2}r_n(1+n+\sqrt{1+n^2})=\dfrac{1}{2}n$

$\therefore\ r_n=\dfrac{n}{1+n+\sqrt{1+n^2}}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1+n+\sqrt{1+n^2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{n}+1+\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+1}}=\dfrac{1}{2}$

8. [출제의도] 거듭제곱근의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\sqrt[n]{a^{2n}}=a^{\frac{2n}{n}}=a^2\quad\therefore$ 참

ㄴ. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[2n]{a}=a^{\frac{1}{n}}a^{\frac{1}{2n}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}}=a^{\frac{3}{2n}},\ \sqrt[3n]{a}=a^{\frac{1}{3n}}$

이므로 $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[2n]{a}\neq\sqrt[3n]{a}\quad\therefore$ 거짓

ㄷ. $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n+1]{a}=a^{\frac{1}{n}}\div a^{\frac{1}{n+1}}=a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}=a^{\frac{1}{n(n+1)}}$

$=\sqrt[n(n+1)]{a}\quad\therefore$ 참

9. [출제의도] 등비수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3이고 공비가 2이므로

$a_n=3\cdot 2^{n-1}$이고 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

$\therefore\ A=\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=\dfrac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3\cdot(2^{10}-1)$

$\therefore\ B=\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{1}{a_k}=\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^{10}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^{10}-1}{2^{10}}\right)=\dfrac{2^{10}-1}{3\cdot 2^9}$

$\therefore\ \dfrac{A}{B}=9\cdot 2^9$

10. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\alpha,\ \beta$가 이차방정식 $2x^2+x-4=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{2},\ \alpha\beta=-2$

한편, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{4}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\dfrac{\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$

11. [출제의도] 직선의 방정식과 등차수열에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$l_1:\ \dfrac{x}{a_1}+\dfrac{y}{b_1}=1,\ l_2:\ \dfrac{x}{a_2}+\dfrac{y}{b_2}=1,\ l_3:\ \dfrac{x}{a_3}+\dfrac{y}{b_3}=1$

에서 세 직선이 점 $(2,1)$을 지나므로

$\dfrac{1}{b_1}=1-\dfrac{2}{a_1},\ \dfrac{1}{b_2}=1-\dfrac{2}{a_2},\ \dfrac{1}{b_3}=1-\dfrac{2}{a_3}$

이때 $\dfrac{1}{b_1},\ \dfrac{1}{b_2},\ \dfrac{1}{b_3}$가 등차수열을 이루므로

$\dfrac{1}{b_2}-\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{b_3}-\dfrac{1}{b_2}$

$\therefore\ \dfrac{2}{a_2}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_3}$

12. [출제의도] 거듭제곱근의 대소를 비교하여 식을 간단히 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}},\ \sqrt[5]{5}=5^{\frac{1}{5}}$

$2^{\frac{1}{2}},\ 3^{\frac{1}{3}}$에서

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\ \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$

$\therefore\ \sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$ …㉠

$2^{\frac{1}{2}},\ 5^{\frac{1}{5}}$에서

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^5=32,\ \left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}=5^2=25$

$\therefore\ \sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$ …㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

$\therefore\ |\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}|+|\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{5}|+|\sqrt[5]{5}-\sqrt{2}|$

$=-(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{5})-(\sqrt[5]{5}-\sqrt{2})$

$=2(\sqrt[3]{3}-\sqrt[5]{5})$

13. [출제의도] 역행렬과 연립방정식의 관계를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

기계 P, Q가 하루에 생산하는 제품의 개수가 각각 p, q이므로

$39(p+q)<120\le 40(p+q)\qquad\therefore\ p+q=3$ …㉠

$14(2p+3q)<120\le 15(2p+3q)\qquad\therefore\ 2p+3q=8$ …㉡

㉠, ㉡에서

$\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=3,\ b=1$

$\therefore\ a+b=4$

14. [출제의도] 일정한 규칙에 따라 나열된 수열에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 수를

(1), (2,2), (3,3,3), (4,4,4,4), (5,5,5,5,5), ⋯

과 같이 묶으면 제 2006 번 째 묶음까지의 항의 개수는

$1+2+\cdots+2006=\dfrac{2006\cdot 2007}{2}=1003\cdot 2007$

이때 1003을 5로 나눈 나머지가 3이고 2007을 5로 나눈 나머지가 2이므로 $1003\cdot 2007$을 5로 나눈 나머지는 1이다.

즉, 제 2006 번 째 묶음의 마지막 수 2006이 나타나는 반직선은 a이므로 2007이 처음으로 나타나는 반직선은 b이다.

15. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수에 관한 성질을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log x = n+\alpha$ (n은 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)라 하면

$\log\sqrt{10}\,x = n+\alpha+\dfrac{1}{2}$, $\log x^2 = 2n+2\alpha$

(i) $0 \leqq \alpha < \dfrac{1}{2}$이면 $\log x$의 지표는 n, $\log\sqrt{10}\,x$의 지표는 n이므로 이들의 합은 $2n$이다.

이것은 $\log x^2$의 지표와 같다.

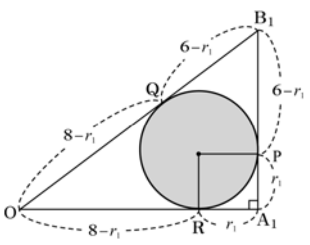
(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq \alpha < 1$이면 $\log x$의 지표는 n이고 $\log\sqrt{10}\,x$의 지표는 $n+1$이므로 이들의 합은 $2n+1$이다.

이것은 $\log x^2$의 지표와 같다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $\log x$의 지표와 $\log\sqrt{10}\,x$의 지표의 합은 $\log x^2$의 지표와 같다.

16. [출제의도] 도형과 관련된 무한등비급수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 직각삼각형 $\triangle OA_1B_1$에서 C_1의 반지름을 r_1이라 하고, 내접원이 $\triangle OA_1B_1$와 만나는 접점을 각각 P, Q, R라 하자.



$\overline{A_1P} = \overline{A_1R} = r_1$, $\overline{B_1P} = \overline{B_1Q} = 6-r_1$, $\overline{OP} = \overline{OQ} = 8-r_1$

$\therefore$ $\overline{OB_1} = \overline{OQ}+\overline{QB_1} = 8-r_1+6-r_1 = 10$

$\therefore$ $r_1 = 2$

원 C_2의 반지름을 r_2라 하면

$\triangle OA_1B_1 \backsim \triangle OA_2B_2$이고 $\overline{OA_1} : \overline{OA_2} = 8:4$

이므로 $r_1 : r_2 = 2:1$ 즉, $r_2 = \dfrac{1}{2}r_1$

마찬가지 방법으로 원 C_n의 반지름을 r_n이라 하면,

$r_n = \dfrac{1}{2}r_{n-1}$이 성립한다.

$\therefore$ $r_n = 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore$ $S_n = \pi\cdot 4\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16\pi}{3}$

17. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log\dfrac{1}{A} = n+\alpha$ (n은 정수, $0 \leqq \alpha < 1$)라 하면

$n+\alpha = \dfrac{5}{3} = 1+\dfrac{2}{3}$ $\therefore$ $n = 1$, $\alpha = \dfrac{2}{3}$

$\log\dfrac{1}{A} = \dfrac{5}{3}$, $-\log A = \dfrac{5}{3}$

$\therefore$ $\log A = -\dfrac{5}{3} = -2+\dfrac{1}{3}$

따라서 $\log A$의 가수는 $\dfrac{1}{3}$이다.

18. [출제의도] 로그의 성질과 정수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\log N = a\log 2+b\log 3+1 = \log(10\cdot 2^a\cdot 3^b)$

$\therefore$ $N = 10\cdot 2^a\cdot 3^b$

$10 \leqq 10\cdot 2^a\cdot 3^b \leqq 100$

$\therefore$ $1 \leqq 2^a\cdot 3^b \leqq 10$ $\cdots$ ㉠

㉠을 만족하는 음이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,0)$ 이므로 정수 N은 7개이다.

19. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\theta = 0$일 때 $k\cdot a^0 = 64$에서 $k = 64$

$\theta = \pi$일 때 $k\cdot a^{\pi} = 64\,a^{\pi} = 125$

$\therefore$ $a = \left(\dfrac{125}{64}\right)^{\frac{1}{\pi}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{3}{\pi}}$

따라서 $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$일 때

$f = 64\cdot\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{3}{\pi}}\right\}^{\frac{2}{3}\pi} = 64\cdot\left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = 100$

20. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_1 = S_1 = 1$ 이므로 $2S_1 = a_1a_2$ 에서

$2\cdot 1 = 1\cdot a_2$ $\therefore$ $a_2 = 2$ $\therefore$ 참

ㄴ. $2S_n = a_na_{n+1}$, $2S_{n-1} = a_{n-1}a_n$ 에서

$2(S_n - S_{n-1}) = a_n(a_{n+1} - a_{n-1})$

$\therefore$ $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$ $\therefore$ 참

ㄷ. ㄴ에서 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$은 모두 공차가 2인 등차수열이고, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$이므로 $\{a_n\}$은 공차가 1인 등차수열이다. $\therefore$ 참

21. [출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

처음 박테리아의 수를 A라 하고 매 시간 16%씩 증가하여 20시간이 지난 후 박테리아의 수가 처음의 k배라 하면

$A\left(1+\dfrac{16}{100}\right)^{20} = kA$ $\therefore$ $k = 1.16^{20}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log k = 20\log 1.16 = 20\times 0.0645$

$= 1.2900 = \log 19.5$

$\therefore$ $k = 19.5$

22. [출제의도] 자연수의 거듭제곱의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}(k^2+2) = \frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}+2\times 6 = 103$

23. [출제의도] 역행렬의 정의를 이해하고 역행렬을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(A-E)B = E$에서

$B = (A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $a = 11$, $d = 1$

$\therefore$ $a+d = 12$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{9n^2-1} < (n+2)a_n < \sqrt{9n^2+4n}$에서

$\dfrac{\sqrt{9n^2-1}}{n+2} < a_n < \dfrac{\sqrt{9n^2+4n}}{n+2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-1}}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4n}}{n+2} = 3$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n = 3$

$\therefore$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}{a_n}^3 = 3^3 = 27$

25. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{21}a_k = a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{20}+a_{21})$

$= 1+4+6+\cdots+22 = 1+\dfrac{10(4+22)}{2} = 131$

26. [출제의도] 행렬의 곱셈에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$(A+B)^2 = A^2+B^2$ 이 성립하려면

$AB+BA = O$ 이어야 하므로 $AB = -BA$이다

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ x & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ x & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 7 & 2-2y \\ x+3 & 2x-y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1+2x & -4 \\ -3+xy & 6-y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1-2x & 4 \\ 3-xy & -6+y \end{pmatrix}$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의해

$x = -4$, $y = -1$

$\therefore$ $x^2+y^2 = 17$

27. [출제의도] 등차수열의 합에 관한 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$100n = 100+97+\cdots+\{100-3(n+8)\}$

$= \dfrac{(n+9)\{2\cdot 100+(-3)(n+8)\}}{2}$

$n^2+17n-528 = 0$, $(n+33)(n-16) = 0$

n은 자연수이므로

$n = 16$

28. [출제의도] 로그가 정의되기 위한 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

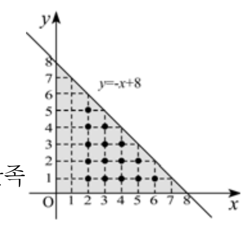
밑의 조건에서

$x > 0$, $x \neq 1$ $\cdots$ ㉠

진수 조건에서

$8-x-y > 0$ $\cdots$ ㉡

그림에서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 15개이다.



29. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

막대의 길이를 1이라 하면, 입체도형 A_2는 A_1에 막대 3개를 이어 붙이고 밑변에 길이가 2인 정삼각형을 붙인 것이다.

입체도형 A_3는 A_2에 막대 3개를 이어 붙이고 밑변에 길이가 3인 정삼각형을 붙인 것이다.

이와 같은 과정을 반복하면 A_n과 A_{n+1}에 사용된 각 막대의 개수 a_n과 a_{n+1} 사이에는

$a_{n+1} = a_n+3+3(n+1)$

$= a_n+3n+6$

인 관계가 성립한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항은 $3n+6$이다.

$\therefore$ $\displaystyle a_{10} = a_1+\sum_{k=1}^{9}(3k+6)$

$= 6+3\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}+6\cdot 9 = 195$

30. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 도형과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$이므로 $\dfrac{2^a3^b}{2^{a-1}3^{b+1}} = \dfrac{2^{2a-1}3^b}{2^{a+1}3^{b+1}}$

$\dfrac{2}{3} = \dfrac{2^{a-2}}{3}$ $\therefore$ $a = 3$

$\therefore\ A=8\cdot 3^b,\ B=12\cdot 3^b,\ C=32\cdot 3^b,\ D=48\cdot 3^b$

$\therefore A+B+C+D=(8+12+32+48)\cdot 3^b$

$=100\cdot 3^b=90^2$

$3^b=81=3^4$ 이므로

$b=4$

$\therefore\ A=2^3\cdot 3^4=648$

수리'나'형 정답

1	④	2	①	3	④	4	②	5	③	6	⑤
7	⑤	8	③	9	①	10	③	11	④	12	⑤
13	④	14	②	15	②	16	①	17	②	18	③
19	③	20	②	21	⑤	22	90	23	12	24	50
25	20	26	17	27	10	28	15	29	26	30	648

해 설

1. '가'형과 동일

2. '가'형과 동일

3. [출제의도] 로그의 정의를 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a^{0.6}=64,\ a^{\frac{6}{10}}=2^6,\ a=(2^6)^{\frac{10}{6}}=2^{10}$

$\therefore\ \sqrt{a}=\sqrt{2^{10}}=2^5=32$

4. [출제의도] 행렬의 곱셈에 대한 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 행렬을 차례로 $A,\ B,\ C,\ D$라 하면 $A,\ B,\ C,\ D$는 각각 $1\times 2,\ 2\times 1,\ 1\times 3,\ 2\times 3$ 행렬이므로 곱셈이 정의되는 행렬은 $AB,\ AD,\ BA,\ BC$의 4가지이다.

5. '가'형과 동일

6. [출제의도] 역행렬의 연산에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $A(A^{-1}-B^{-1})B=(E-AB^{-1})B$

$=B-A\quad\therefore$ 참

ㄴ. $A^2-A+E=O$에서 $A(E-A)=E$

$\therefore\ A^{-1}=E-A\quad\therefore$ 참

ㄷ. $AB^2=(AB)B=E$에서

$B=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\quad\therefore$ 참

7. [출제의도] 행렬을 이용하여 두 직선의 교점을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(2,\ 6)$이다.

8. '가'형과 동일

9. [출제의도] 행렬의 곱셈에 관한 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선희의 가족이 P식당에서 주문하고 지불해야 할 금액은 $3500\times 3+4000\times 5$(원)이므로 행렬 $A,\ B$의 곱 $AB=\begin{pmatrix} 3500 & 4000 \\ 3000 & 4500 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$에서 $(1,\ 2)$성분과 같다.

10. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 로그의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_a 2=\dfrac{\log 2}{\log a}=3$에서 $\quad\log a=\dfrac{\log 2}{3}$

$\log_b 4=\dfrac{\log 4}{\log b}=5$에서 $\quad\log b=\dfrac{2\log 2}{5}$

$\therefore\ \log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}=\dfrac{\frac{2\log 2}{5}}{\frac{\log 2}{3}}=\dfrac{6}{5}$

11. [출제의도] 함수에 의해 정의된 행렬의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f_1(1)=1,\ f_1(2)=1$이므로 $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f_2(1)=2,\ f_2(2)=2$이므로 $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f_3(1)=1,\ f_3(2)=2$이므로 $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f_4(1)=2,\ f_4(2)=1$이므로 $A_4=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ㄱ. $A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\quad\therefore$ 참

ㄴ. $A_2A_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\neq A_4\quad\therefore$ 거짓

ㄷ. $A_2{}^2=A_2A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A_2$

$A_2{}^3=A_2{}^2A_2=A_2A_2=A_2{}^2=A_2$

이와 같은 방법으로 $\ A_2^{10}=A_2\quad\therefore$ 참

12. '가'형과 동일

13. '가'형과 동일

14. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3=AA^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

이므로 $A^4=-A,\ A^5=-A^2,\ A^6=E$

$\therefore\ A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=O$

또한, $A^{6n+1}=A,\ A^{6n+2}=A^2,\ A^{6n+3}=-E$

$A^{6n+4}=-A,\ A^{6n+5}=-A^2,\ A^{6n+6}=E\ (n=0,1,2,\cdots)$

이다. 그런데 365를 6으로 나눈 나머지가 5이므로

(주어진 식)$=A+A^2+A^3+A^4+A^5$

$=-A^6=-E$

15. '가'형과 동일

16. [출제의도] 연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가질 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지려면 행렬 $\begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ b & a-1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로

$(a-1)^2-b=0\qquad\therefore\ b=(a-1)^2$

따라서 점 $(a,\ b)$가 그리는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ①과 같다.

17. '가'형과 동일

18. '가'형과 동일

19. '가'형과 동일

20. [출제의도] 로그의 성질과 이차방정식의 근의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

이차방정식이 실근을 가지므로 판별식 D는

$D=p^2-4q\geq 0\quad\cdots$ ㉠

이고, 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$

한편, $\log_2(\alpha+\beta)=\log_2\alpha+\log_2\beta-1=\log_2\dfrac{\alpha\beta}{2}$

이므로 $\alpha+\beta=\dfrac{\alpha\beta}{2}$

$\therefore\ -p=\dfrac{q}{2}$ 즉, $q=-2p\quad\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$p^2-4q=p^2+8p=p(p+8)\geq 0$

진수 조건에서 $-p>0,\ q>0$이므로

$p\leq -8$이고 $q\geq 16$이다.

따라서 $q-p$의 최소값은 24이다.

21. '가'형과 동일

22. [출제의도] 지수법칙을 활용하여 식의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=12$ 의 양변을 제곱하면

$x^3+2(xy)^{\frac{3}{2}}+y^3=144$

$x^3+y^3=144-2(xy)^{\frac{3}{2}}=144-2\cdot(3^2)^{\frac{3}{2}}$

$=144-54=90$

23. '가'형과 동일

24. [출제의도] 거듭제곱근이 정수가 되기 위한 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt[4]{4^n}=4^{\frac{n}{4}}=2^{\frac{n}{2}}$이므로 n이 2의 배수일 때

$\sqrt[4]{4^n}$이 정수가 된다.

따라서 100이하의 자연수에서 2의 배수의 개수는 50개이다.

25. [출제의도] 역행렬의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$A\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=B$ 의 양변에 A^{-1}을 곱하면

$E\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=A^{-1}B\quad\therefore\ A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=B$ 의 양변에 B^{-1}을 곱하면

$B^{-1}A\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=B^{-1}B$

$\therefore\ B^{-1}A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore\ A^{-1}B+B^{-1}A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 20이다.

26. '가'형과 동일

27. [출제의도] 자연수의 양의 약수의 성질을 이용하여 로그값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=2^3\times 3^4$ 의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(4+1)=20$

이 20개의 약수를 작은 수부터 차례로

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{20}$ 라 하면

$a_1a_{20}=n,\ a_2a_{19}=n,\ \cdots,\ a_{10}a_{11}=n$

$\therefore\ M=a_1a_2\cdots a_{20}=n^{10}$

$\therefore\ \log_n M=\log_n n^{10}=10$

28. '가'형과 동일

29. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 이차함수의 최대값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A+B=O$이므로

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & b-10 \\ a-10 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & a+b-10 \\ a+b-10 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore a+b=10\quad\cdots$ ㉠

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+ab & 0 \\ 0 & ab+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$\therefore\ ab+1=k\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$k=ab+1=a(10-a)+1=-(a-5)^2+26$

따라서 k의 최대값은 26이다.

30. '가'형과 동일