

제 2 교시

수학 영역(B형)

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합이 10일 때, a 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{5}{x}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{e^5}$ ② $\frac{1}{e^3}$ ③ 1 ④ e^3 ⑤ e^5

3. 함수 $f(x) = \sin x - 4x$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [2점]

- ① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

4. $\int_0^1 2e^{2x} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $e^2 - 1$ ② $e^2 + 1$ ③ $e^2 + 2$
 ④ $2e^2 - 1$ ⑤ $2e^2 + 1$

2

수학 영역(B형)

5. 서로 평행하지 않은 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=2$ 이고 $\vec{a} \cdot \vec{b}=2$ 일 때, 두 벡터 \vec{a} 와 $\vec{a}-t\vec{b}$ 가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

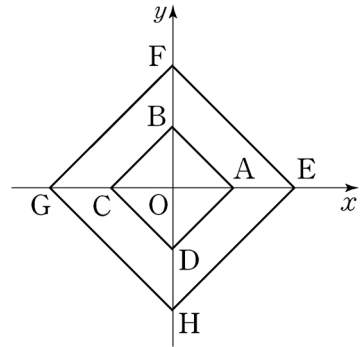
6. 분수부등식

$$\frac{(x+2)(x^2+1)}{x-1} \leq 0$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 그림과 같이 좌표평면에 모든 꼭짓점이 좌표축 위에 있고 한 변의 길이가 각각 $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ 인 정사각형 ABCD와 정사각형 EFGH가 있다. 두 일차변환 f, g 를 나타내는 행렬을 각각 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 이라 하자. 합성변환 $g \circ f$ 에 의하여 점 A가 점 H로 옮겨질 때, 상수 k 의 값은? [3점]



- ① -2 ② $-\sqrt{2}$ ③ -1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

8. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 삼각방정식

$$\sin x = \sin 2x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

- ① π ② $\frac{7}{6}\pi$ ③ $\frac{5}{4}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

9. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) = \frac{2}{5}P(B)$$

일 때, $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$ 의 값은? (단, $P(A \cap B) \neq 0$ 이다.) [3점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

10. 도로용량이 C 인 어느 도로구간의 교통량을 V , 통행시간을 t 라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{V}{C} \quad (t > t_0)$$

(단, t_0 은 도로 특성 등에 따른 기준통행시간이고, k 는 상수이다.)

이 도로구간의 교통량이 도로용량의 2배일 때 통행시간은 기준통행시간 t_0 의 $\frac{7}{2}$ 배이다. k 의 값은? [3점]

- ① $-4\log 2$ ② $1 - 7\log 2$ ③ $-3\log 2$
 ④ $1 - 6\log 2$ ⑤ $1 - 5\log 2$

11. 자연수 n 에 대하여 직선 $y = nx + (n+1)$ 이 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$ 이고 초점이 $(a_n, 0)$ 인 포물선에 접할 때,

$\sum_{n=1}^5 a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

12. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^n S_k \quad (n \geq 1) \dots\dots (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식 (*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \dots\dots \textcircled{1}$$

이다. (*)에서 $\textcircled{1}$ 을 빼서 정리하면

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\textcircled{가}}{n} \quad (n \geq 2)$$

이다. $\textcircled{1}$ 으로부터 $S_2 = 2$ 이고,

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \dots \times \frac{S_3}{S_2} \times S_2 \quad (n \geq 3)$$

이므로

$$S_n = n! \times \frac{\textcircled{나}}{2} \quad (n \geq 3)$$

이다. 그러므로 a_n 은

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1, 2) \\ \frac{n^2 - n + 1}{2} \times (n-1)! & (n \geq 3) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(4) \times g(20)$ 의 값은? [3점]

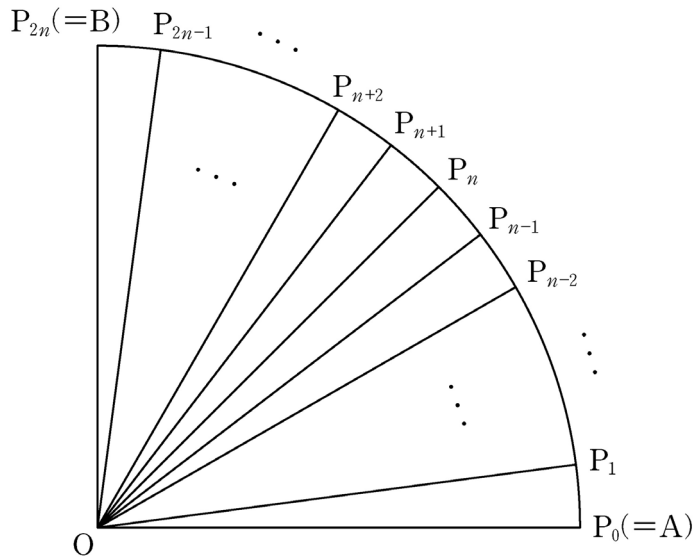
- ① 225 ② 250 ③ 275 ④ 300 ⑤ 325

[13~14] 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다.

자연수 n에 대하여 호 AB를 2n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $P_0(=A), P_1, P_2, \dots, P_{2n-1}, P_{2n}(=B)$ 라 하자.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 주어진 자연수 n에 대하여 $S_k (1 \leq k \leq n)$ 을

삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$ 의 넓이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{13}{12\pi}$ ③ $\frac{7}{6\pi}$ ④ $\frac{5}{4\pi}$ ⑤ $\frac{4}{3\pi}$

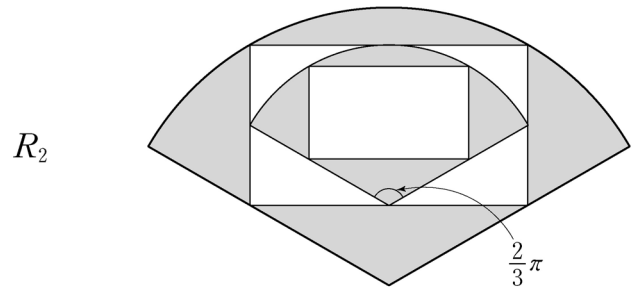
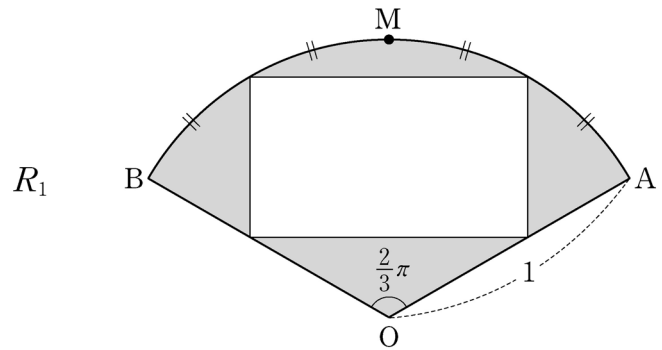
14. $n=3$ 일 때, 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 중에서 임의로 선택한 한 개의 점을 P라 하자. 부채꼴 OPA의 넓이와 부채꼴 OPB의 넓이의 차를 확률변수 X라 할 때, $E(X)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\pi}{11}$ ② $\frac{\pi}{10}$ ③ $\frac{\pi}{9}$ ④ $\frac{\pi}{8}$ ⑤ $\frac{\pi}{7}$

15. 좌표공간에 두 점 $(a, 0, 0)$ 과 $(0, 6, 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $(0, 0, 4)$ 와 직선 l 사이의 거리가 5일 때, a^2 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

16. 중심이 O , 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 그림과 같이 호 AB 를 이등분하는 점을 M 이라 하고 호 AM 과 호 MB 를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB 에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 그림 R_2 에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



⋮

⋮

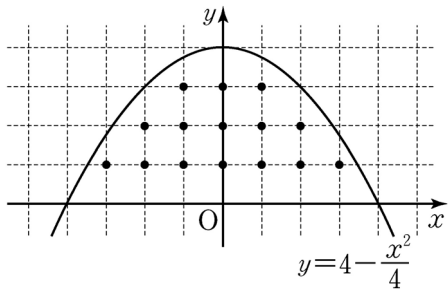
- ① $\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi - \sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi - 3\sqrt{2}}{3}$
 ④ $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi - 2\sqrt{3}}{3}$

17. 다음 조건을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (a, b) 중에서 임의로 서로 다른 두 점을 선택한다. 선택된 두 점의 y 좌표가 같을 때, 이 두 점의 y 좌표가 2일 확률은? [4점]

(가) a, b 는 정수이다.

(나) $0 < b < 4 - \frac{a^2}{4}$

- ① $\frac{4}{17}$ ② $\frac{5}{17}$ ③ $\frac{6}{17}$ ④ $\frac{7}{17}$ ⑤ $\frac{8}{17}$



18. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB + A + B = 2E, \quad A^3 + E = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

- ㄱ. $A + E$ 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. $AB = BA$
 ㄷ. $A + B = -E$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 어느 학교 3학년 학생의 A 과목 시험 점수는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따르고, B 과목 시험 점수는 평균이 $m+3$, 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 3학년 학생 중에서 A 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 9%이고, B 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 15%일 때, $m+\sigma$ 의 값은?
(단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.04) = 0.35$, $P(0 \leq Z \leq 1.34) = 0.41$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 68.6 ② 70.6 ③ 72.6 ④ 74.6 ⑤ 76.6

20. 3 이상의 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. f\left(\frac{n}{2}\right) = f'\left(\frac{n}{2}\right)$$

- ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=n$ 에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양수 t 에 대하여 $\log t$ 의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여

$$f(t) = 9n \left\{ g(t) - \frac{1}{3} \right\}^2 - n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$ 의 합을 a_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

단답형

22. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 + a_2 + a_4 = 55$ 일 때, a_3 의 값을 구하시오. [3점]

23. 로그방정식 $\log_8 x - \log_8(x-7) = \frac{1}{3}$ 의 해를 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{a} = \frac{z+5}{4}$ 에 수직이고

점 $(1, 1, -2)$ 를 지나는 평면의 방정식을 $2x+5y+bz+c=0$ 이라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b, c 는 상수이다.) [3점]

25. 1보다 큰 실수 a 에 대하여 타원 $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 의 두 초점과

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 의 두 초점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12일 때, a^2 의 값을 구하시오. [3점]

26. 자연수 n 에 대하여 $abc=2^n$ 을 만족시키는

1보다 큰 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수가 28일 때, n 의 값을 구하시오. [4점]

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(0, 0)$ 을 지날 때, 무리방정식

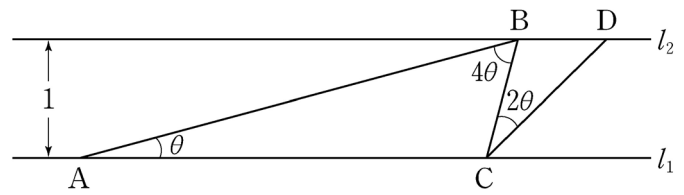
$$f(\sqrt{x+1}-x)=f(1)$$

의 모든 실근의 합을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 서로 평행한 두 직선 l_1 과 l_2 사이의 거리가 1이다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 직선 l_2 위에 점 B를 선분 AB와 직선 l_1 이 이루는 각의 크기가 θ 가 되도록 잡고, 직선 l_1 위에 점 C를 $\angle ABC=4\theta$ 가 되도록 잡는다. 직선 l_2 위에 점 D를 $\angle BCD=2\theta$ 이고 선분 CD가 선분 AB와 만나지 않도록 잡는다.

삼각형 ABC의 넓이를 T_1 , 삼각형 BCD의 넓이를 T_2 라 할 때,

$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{T_1}{T_2}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{10}$) [4점]

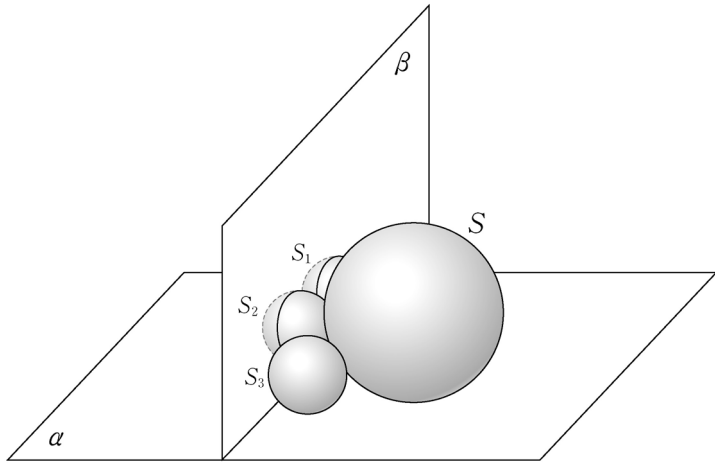


29. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) S 의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3 의 반지름의 길이는 1이다.
- (나) S_1, S_2, S_3 은 모두 S 에 접한다.
- (다) S_1 은 S_2 와 접하고, S_2 는 S_3 과 접한다.

S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 이라 하자. 두 점 O_1, O_2 를 지나고 평면 α 에 수직인 평면을 β , 두 점 O_2, O_3 을 지나고 평면 α 에 수직인 평면이 S_3 과 만나서 생기는 단면을 D 라 하자. 단면 D 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.
- (나) 임의의 양의 실수 t 에 대하여 세 점 $(0, 0), (t, f(t)), (t+1, f(t+1))$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$ 이다.

(다) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = 2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.