

01. ④ 02. ⑤ 03. ③ 04. ① 05. ②  
 06. ③ 07. ⑤ 08. ④ 09. ① 10. ④  
 11. ① 12. ② 13. ① 14. ② 15. ⑤  
 16. ④ 17. ② 18. ③ 19. ⑤ 20. ③  
 21. ① 22. 20 23. 14 24. 10 25. 19  
 26. 9 27. 7 28. 6 29. 11 30.  
 127

1. 출제의도 : 행렬의 연산법칙을 이용하여 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+a & 1 \end{pmatrix}$$

이고, 행렬  $A+B$ 의 모든 성분의 합이 10이므로

$$2+2+1+a+1=10$$

$$\therefore a=4$$

정답 ④

2. 출제의도 : 함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^5$$

$$= e^5$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 삼각함수와 다항함수의 도함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \sin x - 4x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = \cos x - 4 \text{ 이므로}$$

$$f'(0) = \cos 0 - 4$$

$$= 1 - 4$$

$$= -3$$

정답 ③

4. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 2e^{2x} dx = [e^{2x}]_0^1$$

$$= e^2 - 1$$

정답 ①

5. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\vec{a} \perp (\vec{a} - t\vec{b}) \text{ 이므로}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = 0 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } \vec{a} \cdot \vec{a} - t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$$

$$|\vec{a}|^2 - t(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$$

$$2^2 - t \times 2 = 0$$

$$\therefore t = 2$$

정답 ②

6. 출제의도 : 분수방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{(x+2)(x^2+1)}{x-1} \leq 0$$

$$(x+2)(x^2+1)(x-1) \leq 0 \quad (x \neq 1)$$

이때,  $x^2 + 1 > 0$ 이므로  
 $(x+2)(x-1) \leq 0$  ( $x \neq 1$ )  
 $\therefore -2 \leq x < 1$

따라서, 정수  $x$ 는  $-2, -1, 0$ 으로  
 3개이다.

정답 ③

7. 출제의도 : 합성변환을 이용하여 이동  
 한 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각이등변삼각형 OAB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \overline{OA} = 1$$

$$\therefore A(1, 0)$$

직각이등변삼각형 OGH에서

$$\overline{GH} = 2\sqrt{2} \text{ 이므로 } \overline{OH} = 2$$

$$\therefore H(0, -2)$$

합성변환  $g \circ f$ 를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

이고,

$$\begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \end{pmatrix}$$

이므로

합성변환  $g \circ f$ 에 의하여 점  $A(1, 0)$ 이  
 옮겨지는 점의 좌표는  $(0, -k)$ 이다.

이 점이 점  $H(0, -2)$ 와 일치하므로  
 $k=2$ 이다.

정답 ⑤

8. 출제의도 : 삼각방정식의 해를 구할  
 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin x = \sin 2x \text{에서}$$

$$\sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

따라서,  $0 \leq x \leq \pi$ 에서 해를 구하면

$$x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{3}$$

그러므로 모든 해의 합은  $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

정답 ④

9. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하  
 여 두 확률  $P(A \cup B)$ ,  $P(A \cap B)$ 의 비를  
 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) = \frac{2}{5}P(B) \text{에서}$$

$$P(A) = \frac{3}{2}P(A \cap B)$$

$$P(B) = \frac{5}{2}P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{2}P(A \cap B) + \frac{5}{2}P(A \cap B)$$

$$- P(A \cap B)$$

$$= 3P(A \cap B)$$

$$\therefore \frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{3P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = 3$$

정답 ①

10. 출제의도 : 실생활에 활용된 상용로그  
 그에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

교통량이 도로용량의 2배이므로

$$V = 2C$$

또, 통행시간은 기준 통행시간  $t_0$ 의  $\frac{7}{2}$ 배

이므로

$$t = \frac{7}{2}t_0$$

$$\text{이 값을 } \log\left(\frac{t}{t_0}-1\right) = k + 4\log\frac{V}{C}$$

에 대입하면

$$\log\left(\frac{\frac{7}{2}t_0}{t_0}-1\right) = k + 4\log\frac{2C}{C}$$

$$\log\frac{5}{2} = k + 4\log 2$$

$$\begin{aligned}\therefore k &= \log\frac{5}{2} - 4\log 2 \\ &= \log\frac{10}{2^2} - 4\log 2 \\ &= 1 - 6\log 2\end{aligned}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 포물선과 직선이 접할 조건을 이용하여 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

꼭짓점의 좌표가  $(0, 0)$  이고 초점이  $(a_n, 0)$  인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4a_n x$$

이고, 기울기가  $n$  인 접선의 방정식은

$$y = nx + \frac{a_n}{n} \cdots \textcircled{1}$$

①과 직선  $y = nx + (n+1)$  이 일치하므로

$$\frac{a_n}{n} = n+1$$

$$\therefore a_n = n(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^5 a_n &= \sum_{n=1}^5 n(n+1) \\ &= 2+6+12+20+30 \\ &= 70\end{aligned}$$

정답 ①

12. 출제의도 : 수열에 관련된 식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 식(\*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \quad (n \geq 2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

이다. (\*)에서 ①을 빼면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \sum_{k=1}^n S_k - \sum_{k=1}^{n-1} S_k$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n} S_n$$

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n} \quad (n \geq 2)$$

이다. ①으로부터  $S_2 = 2$ 이고,

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \cdots \times \frac{S_3}{S_2} \times S_2$$

이므로

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \times \cdots \times \frac{S_3}{S_2} \times S_2$$

$$S_n = \frac{n^2}{n-1} \times \frac{(n-1)^2}{n-2} \times \cdots \times \frac{3^2}{2} \times 2$$

$$\therefore S_n = n! \times \left[ \frac{n}{2} \right] \quad (n \geq 3)$$

이다. 그러므로  $a_n$ 은

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=1, 2) \\ \frac{n^2-n+1}{2} \times (n-1)! & (n \geq 3) \end{cases}$$

이다.

따라서,  $f(n) = (n+1)^2$ ,  $g(n) = \frac{n}{2}$  이므로

$$f(4) \times g(20) = 25 \times 10 = 250$$

정답 ②

13. 출제의도 : 정적분을 이용하여 무한 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\angle P_m O P_{m+1} = \frac{1}{2n} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4n}$$

$$(m=0, 1, 2, \dots, 2n-1)$$

이므로 삼각형  $OP_{n-k}P_{n+k}$ 에서

$$\angle P_{n+k} O P_{n-k} = 2k \times \frac{\pi}{4n} = \frac{k\pi}{2n}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots, n)$$

따라서 삼각형  $OP_{n-k}P_{n+k}$ 의 넓이  $S_k$ 는

$$S_k = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{2n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} x \, dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1$$

$$= 0 + \frac{1}{\pi} \cos 0$$

$$= \frac{1}{\pi}$$

정답 ①

14. 출제의도 : 확률분포를 이용하여 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

작은 부채꼴 하나의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$$

이때, 점 P에 따라 두 부채꼴의 넓이의

차는  $0, 2 \times \frac{\pi}{24}, 4 \times \frac{\pi}{24}$ 의 값을 가질 수 있다. 그러므로  $X$ 의 확률분포를 구하면 다음과 같다.

| $X$    | 0             | $2 \times \frac{\pi}{24}$ | $4 \times \frac{\pi}{24}$ |
|--------|---------------|---------------------------|---------------------------|
| $P(X)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$             | $\frac{2}{5}$             |

따라서,

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{2\pi}{24} \times \frac{2}{5} + \frac{4\pi}{24} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{\pi}{10}$$

정답 ②

15. 출제의도 : 좌표공간에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선  $l$ 의 방향벡터는  $\vec{u} = (a, -6, 0)$ 이고  
직선  $l$ 의 방정식은

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y}{-6}, \quad z=0$$

이다. 점  $A(0, 0, 4)$ 에서 직선  $l$ 에 내린 수선의 발을  $H(x_1, y_1, 0)$ 이라 하고,

$$\frac{x_1-a}{a} = \frac{y_1}{-6} = t \quad (t \text{는 실수})$$

로 놓으면  $x_1 = at + a, y_1 = -6t$ 이므로

$H(at + a, -6t, 0)$ 이다.

$$\overrightarrow{AH} = (at + a, -6t, -4) \text{이고}$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \text{이므로}$$

$$(at + a, -6t, -4) \cdot (a, -6, 0) = 0 \text{에서}$$

$$a^2 t + a^2 + 36t = 0, \quad t = -\frac{a^2}{a^2 + 36}$$

$$\overline{AH} = 5 \text{이므로}$$

$$(at + a)^2 + 36t^2 + 16 = 25$$

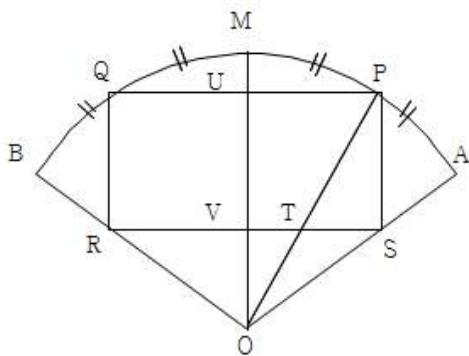
$$\begin{aligned}
 (a^2 + 36)t^2 + 2a^2t + a^2 - 9 &= 0 \\
 (a^2 + 36) \times \frac{a^4}{(a^2 + 36)^2} - \frac{2a^4}{a^2 + 36} + a^2 - 9 &= 0 \\
 -\frac{a^4}{a^2 + 36} + a^2 - 9 &= 0 \\
 a^2 - 9 &= \frac{a^4}{a^2 + 36} \\
 a^4 + 27a^2 - 324 &= a^4 \\
 27a^2 &= 324 \\
 \therefore a^2 &= 12
 \end{aligned}$$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 무한등비급수에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 부채꼴에 내접하는 사각형의 각 꼭짓점을 P, Q, R, S라 하고 선분 OP가 이 직사각형과 만나는 점을 T, 선분 OM이 이 직사각형과 만나는 점을 U, V라 하자.



삼각형 OPU에서

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ} &= 2\overline{UP} \\
 &= 2 \times \overline{OP} \sin \frac{\pi}{6} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

또, 두 삼각형 OPU, OSV에서

$$\overline{PS} = \overline{UV}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{OU} - \overline{OV} \\
 &= \overline{OP} \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\overline{VS}}{\tan \frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2}{3} \pi - \overline{PQ} \times \overline{PS} \\
 &= \frac{\pi - \sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

한편, 직사각형에 내접하는 부채꼴의 반지름의 길이를  $r$ 이라 하면

$$r = \overline{UV} = \overline{PS} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그러므로 넓이의 비는  $1^2 : \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$  즉,

$1 : \frac{1}{3}$ 이다.

따라서,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{\frac{\pi - \sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

정답 ④

17. 출제의도 : 부등식의 영역을 이용하여 조건부확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

15개의 점 중에서 서로 다른 두 점을

$${}_{15}C_2 = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105 (\text{가지})$$
$${}_7C_2 = 21 \text{ (가자)}$$
$${}_5C_2 = 10 (\text{가지})$$
$${}_3C_2 = 3(\text{가지})$$
$$P(A) = \frac{21 + 10 + 3}{105} = \frac{34}{105}$$

$$P(A \cap B) = \frac{10}{105}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{10}{105}}{\frac{34}{105}} \\ &= \frac{5}{17}\end{aligned}$$

18. 출제의도 : 행렬에 관한 성질을 알고 있는가?

7.  $AB + A + B = 2E$ 에 대해

$$AB+A+B+E=3E$$

$$(A+E)(B+E)=3E \quad --\textcircled{7}$$

$$(A + E) \frac{1}{3} (B + E) = E$$

$$\therefore (A+E)^{-1} = \frac{1}{3}(B+E) \quad (\text{참})$$

$$(A + E)(B + E) = 3E \quad \text{---} \textcircled{L}$$
$$(B+E)(A+E) = 3E \quad --\textcircled{C}$$
$$AB+A+B+E=3E$$

$$BA + B + A + E = 3E$$

$$AB - BA = 0$$

$$\therefore AB=BA \quad (\text{참})$$

$$(A + E)(A^2 - A + E) = O$$
$$(A+E)^{-1}(A+E)(A^2-A+E) = (A+E)^{-1}O$$

$$A^2 - A + E = O$$

$$(A + E)(A - 2E) = -3E$$

$$(A + E) \left\{ -\frac{1}{3}(A - 2E) \right\} = E$$

$$\therefore (A+E)^{-1} = -\frac{1}{3}(A-2E)$$

그러므로  $(A+E)^{-1} = \frac{1}{3}(B+E)$  이므로

$$-\frac{1}{3}(A-2E)=\frac{1}{3}(B+E)$$

$$A-2E=-B-E$$

$$\therefore A+B=E \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19. 출제의도 : 정규분포를 따르는 확률 변수에 대하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A 과목 시험 점수를 확률변수  $X$ 라 하면  $X$ 는 정규분포  $N(m, \sigma^2)$ 을 따르고,  
B 과목 시험 점수를 확률변수  $Y$ 라 하면  $Y$ 는 정규분포  $N(m+3, \sigma^2)$ 을 따른다.

$$P(X \geq 80) = 0.09 \text{ 이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.09 = 0.41$$

$$\therefore \frac{80-m}{\sigma} = 1.34 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$P(Y \geq 80) = 0.15 \text{ 이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{80-m-3}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.15 = 0.35$$

$$\therefore \frac{77-m}{\sigma} = 1.04 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \div \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{80-m}{77-m} = \frac{1.34}{1.04} = \frac{67}{52}$$

$$4160 - 52m = 5159 - 67m$$

$$15m = 999, \quad m = \frac{333}{5} = 66.6$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \sigma = \frac{80-66.6}{1.34} = \frac{13.4}{1.34} = 10$$

$$\therefore m + \sigma = 66.6 + 10 = 76.6$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 미분을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\neg. f(x) = x^n e^{-x} \text{에서}$$

$$f\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

또,

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} \\ &= x^{n-1}e^{-x}(n-x) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{n}{2}\right) &= \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1} \times e^{-\frac{n}{2}} \times \frac{n}{2} \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}} \quad \dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

①과 ②에서

$$f\left(\frac{n}{2}\right) = f'\left(\frac{n}{2}\right) \text{ (참)}$$

$$\neg. f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = n$$

또,  $0 < x < n$ 일 때,  $f'(x) > 0$ 이고  $x > n$ 일 때,  $f'(x) < 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = n$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

$$\sqsubset. f'(x) = x^{n-1}e^{-x}(n-x) \text{에서}$$

$$f''(x) = (n-1)x^{n-2}e^{-x}(n-x)$$

$$+ x^{n-1}(-e^{-x})(n-x)$$

$$+ x^{n-1}e^{-x}(-1)$$

$$= x^{n-2}e^{-x}(x^2 - 2nx + n^2 - n)$$

$$n = 4 \text{일 때, } f''(x) = x^2 e^{-x}(x^2 - 8x + 12)$$

이므로  $f''(0) = 0$ 이지만  $x$ 의 값이 0보다 작은 값에서 0보다 큰 값으로 변할 때,  $f''(x)$ 의 부호가 변하지 않는다.

그러므로 점  $(0, 0)$ 이 곡선  $y = f(x)$ 의 변곡점이라 할 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은  $\neg$ ,  $\sqsubset$ 이다.

정답 ③

21. 출제의도 : 지표와 가수의 성질을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log t = f(t) + g(t)$$

$$f(t) \text{는 정수, } 0 \leq g(t) < 1 \text{ 이므로}$$

$$-\frac{1}{3} \leq g(t) - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

$$0 \leq \left\{ g(t) - \frac{1}{3} \right\}^2 < \frac{4}{9}$$

$$0 \leq 9n \left\{ g(t) - \frac{1}{3} \right\}^2 < 4n$$

$$-n \leq 9n \left\{ g(t) - \frac{1}{3} \right\}^2 - n < 3n$$

즉,  $-n \leq f(t) < 3n$  이고,

$f(t)$ 는 정수이므로  $f(t)$ 의 값은

$-n, -n+1, -n+2, \dots, 0, 1, 2, \dots, 3n-1$ 이다.

$$\begin{aligned} a_n &= (-n) + (-n+1) + \dots + (-1) + 0 \\ &\quad + 1 + 2 + \dots + n \\ &\quad + (n+1) + (n+2) + \dots + (3n-1) \\ &= (n+1) + (n+2) + \dots + (3n-1) \\ &= \frac{(2n-1)\{(n+1) + (3n-1)\}}{2} \\ &= 2n(2n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(2n-1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-2}{n} \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ①

22. 출제의도 : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

수열  $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항을  $a$ 라 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_4 &= 2 + 2a + 2^3a \\ &= 11a \\ &= 55 \\ \therefore a &= 5 \end{aligned}$$

따라서,  $a_3 = 5 \times 2^2 = 20$

정답 20

23. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에 의하여

$$x > 0, x-7 > 0 \text{ 이므로 } x > 7$$

$$\log_8 \frac{x}{x-7} = \frac{1}{3} \text{ 에서}$$

$$\frac{x}{x-7} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$x = 2x - 14$$

$$x = 14$$

이고, 이는 진수의 조건을 만족하므로 구하는 해는 14이다.

정답 14

24. 출제의도 : 평면의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선의 방향벡터  $\vec{d} = (2, a, 4)$ 가 평면의 법선벡터이다.

또, 평면이 점  $(1, 1, -2)$ 를 지나므로 구하는 평면의 방정식은

$$2(x-1) + a(y-1) + 4(z+2) = 0$$

$$2x + ay + 4z - a + 6 = 0$$

이때, 평면의 방정식이

$$2x + 5y + bz + c = 0$$

이므로

$$a = 5, b = 4, -a + 6 = c$$

따라서,

$$a + b + c = 5 + 4 + 1 = 10$$

정답 10



25. 출제의도 : 타원과 쌍곡선의 초점의 좌표를 구하여 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원  $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$  에서  $a > 1$  이므로

두 초점의 좌표는

$A(0, \sqrt{a^2-1})$ ,  $B(0, -\sqrt{a^2-1})$

이고, 쌍곡선  $x^2 - y^2 = 1$  의 두 초점의 좌표는

$C(\sqrt{2}, 0)$ ,  $D(-\sqrt{2}, 0)$

이다.

네 점 A, B, C, D 를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12 이므로

$$2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{a^2-1} = 12$$

$$\sqrt{a^2-1} = 3\sqrt{2}$$

$$a^2 - 1 = 18$$

$$\therefore a^2 = 19$$

정답 19

26. 출제의도 : 중복조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z$$

( $x, y, z$ 는 1이상의 자연수)

라 하면  $abc = 2^n$ 에서

$$2^{x+y+z} = 2^n$$

$$\therefore x+y+z = n \quad \text{---}\textcircled{7}$$

$x = x' + 1, y = y' + 1, z = z' + 1$ 이라 하면

$x', y', z'$ 은 0이상의 정수이고  $\textcircled{7}$ 은

$$x' + y' + z' = n - 3$$

이때, 순서쌍 ( $a, b, c$ )의 개수는

$${}_3H_{n-3}$$

$$= {}_{n-1}C_{n-3}$$

$$= {}_{n-1}C_2$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= 28$$

따라서,  $n = 9$

정답 9

27. 출제의도 : 이차함수를 이용하여 무리방정식의 실근의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x(x+4) = x^2 + 4x \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 5 \text{ 이다.}$$

따라서  $f(t) = 5$  인  $t$ 의 값은

$$t^2 + 4t = 5 \text{ 에서}$$

$$t^2 + 4t - 5 = 0, (t+5)(t-1) = 0$$

$$t = -5, 1$$

이므로

$$f(\sqrt{x+1}-x) = f(1) = 5 \text{ 에서}$$

$$\sqrt{x+1}-x = -5 \text{ 또는}$$

$$\sqrt{x+1}-x = 1 \text{ 이다.}$$

(i)  $\sqrt{x+1}-x = -5$  일 때,

$$\sqrt{x+1} = x-5 \quad \dots \textcircled{7}$$

양변을 제곱하면

$$x+1 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$(x-3)(x-8) = 0$$

$\textcircled{7}$ 에서  $x \geq 5$  이므로  $x = 8$

(ii)  $\sqrt{x+1}-x = 1$  일 때,

$$\sqrt{x+1} = x+1 \quad \dots \textcircled{8}$$

양변을 제곱하면

$$x+1 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

이는 ㉠을 만족시킨다.

따라서 주어진 무리방정식의 실근은 8, 0, -1 이므로 구하는 합은 7이다.

정답 7

28. 출제의도 : 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 B에서 직선  $l_1$ 에 내린 수선의 발을 B'이라 하면 삼각형 ABB'에서

$$\overline{AB} = \frac{1}{\sin \theta}$$

삼각형 ABC에서  $\angle ACB = \pi - 5\theta$ 이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin(\pi - 5\theta)}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{1}{\sin 5\theta} \quad \text{--- ㉡}$$

그러므로

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \times \overline{BA} \times \overline{BC} \times \sin 4\theta \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\sin 5\theta} \times \sin 4\theta \\ &= \frac{\sin 4\theta}{2 \sin \theta \sin 5\theta} \end{aligned}$$

또, 삼각형 BCD에서

$\angle CBD = \pi - 5\theta$ ,  $\angle CDB = 3\theta$ 이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 3\theta} = \frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta}$$

㉡에서

$$\overline{BD} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \sin 5\theta}$$

그러므로

$$T_2 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{BD} \times \sin(\pi - 5\theta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta \sin 5\theta} \times \frac{1}{\sin 5\theta} \times \sin 5\theta \\ &= \frac{\sin 2\theta}{2 \sin 3\theta \sin 5\theta} \end{aligned}$$

따라서,

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{T_1}{T_2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{\sin 4\theta}{2 \sin \theta \sin 5\theta}}{\frac{\sin 2\theta}{2 \sin 3\theta \sin 5\theta}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin 4\theta \sin 3\theta}{\sin \theta \sin 2\theta}$$

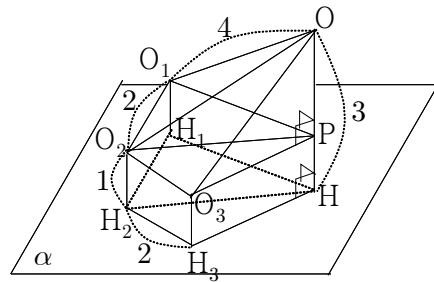
$$= 6 \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\frac{\sin 4\theta}{4\theta} \times \frac{\sin 3\theta}{3\theta}}{\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}$$

$$= 6$$

정답 6

29. 출제의도 : 공간도형의 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



구 S의 중심을 O라 하고

네 점 O, O<sub>1</sub>, O<sub>2</sub>, O<sub>3</sub>에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H, H<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>, H<sub>3</sub>이라 하면

$$\overline{OH} = 3, \quad \overline{O_1H_1} = \overline{O_2H_2} = \overline{O_3H_3} = 1$$

또, 점 O<sub>1</sub>에서 선분 OH에 내린 수선의 발을 P라 하면

$$\overline{O_1P} \perp \overline{OH}, \overline{O_2P} \perp \overline{OH}, \overline{O_3P} \perp \overline{OH}$$

두 구  $S, S_1$  이 외접하므로

$$\overline{OO_1} = 3 + 1 = 4$$

$$\text{마찬가지로, } \overline{OO_2} = \overline{OO_3} = 4$$

$$\text{직각삼각형 } OO_1P \text{ 에서 } \overline{OP} = 3 - 1 = 2$$

$$\text{이므로 } \overline{O_1P} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

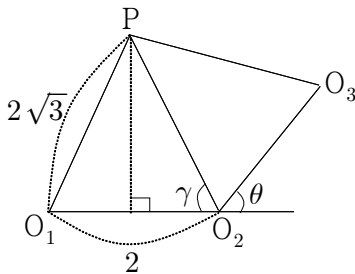
$$\text{마찬가지로, } \overline{O_2P} = \overline{O_3P} = 2\sqrt{3}$$

평면  $O_1O_2H_2H_1$  은 평면  $\beta$ 와 같고,

평면  $O_2H_2H_3O_3$  은 단면  $D$ 를 포함한다.

또, 두 평면  $O_1O_2H_2H_1, O_2H_2H_3O_3$  의 교선이 직선  $O_2H_2$  이므로 두 평면이 이루는 각을  $\theta$ 라 하면

$$\theta = \pi - \angle O_1O_2O_3 \text{ 이다.}$$



삼각형  $PO_1O_2$  에서

$$\overline{O_1O_2} = 2, \overline{O_2P} = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\angle O_1O_2P = \gamma \text{ 라 하면}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

두 삼각형  $PO_1O_2, PO_2O_3$  은 합동이므로

$$\angle O_1O_2O_3 = 2\gamma$$

$$\cos 2\gamma = 2\cos^2 \gamma - 1 = 2 \times \frac{1}{12} - 1 = -\frac{5}{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \cos(\pi - 2\gamma) = -\cos 2\gamma = \frac{5}{6}$$

단면  $D$ 는 반지름의 길이가 1인 원이므로 단면  $D$ 의 넓이는  $\pi$ 이고,

평면  $\beta$  위로의 정사영의 넓이는

$$\pi \times \cos \theta = \pi \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \pi$$

$$\therefore p + q = 6 + 5 = 11$$

정답 11

30. 출제의도 : 주어진 조건으로부터 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형의 넓이는 넓이가  $\frac{t+1}{t}$  이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}tf(t) + \frac{1}{2}\{f(t) + f(t+1)\} \\ - \frac{1}{2}(t+1)f(t+1) = \frac{t+1}{t} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\{(t+1)f(t) - tf(t+1)\} = \frac{t+1}{t}$$

양변에  $\frac{2}{t(t+1)}$  을 곱하면

$$\frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1} = \frac{2}{t^2}$$

$$\therefore \frac{f(t+1)}{t+1} = \frac{f(t)}{t} - \frac{2}{t^2}$$

이때,  $g(t) = \frac{f(t)}{t}$  로 놓으면

$$g(t+1) = g(t) - \frac{2}{t^2}$$

한편,

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x) dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x) dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x) dx$$

$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x) dx + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x+1) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left\{ g(x) - \frac{2}{x^2} \right\} dx \\
&= 2 \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= 2 \left\{ \int_{\frac{7}{2}}^4 g(x)dx + \int_4^{\frac{9}{2}} g(x)dx \right\} \\
&\quad + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= 2 \left\{ \int_{\frac{7}{2}}^4 g(x)dx + \int_3^{\frac{7}{2}} g(x+1)dx \right\} \\
&\quad + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= 2 \left\{ \int_{\frac{7}{2}}^4 g(x)dx + \int_3^{\frac{7}{2}} \left\{ g(x) - \frac{2}{x^2} \right\} dx \right\} \\
&\quad + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= 2 \left\{ \int_3^4 g(x)dx + \int_3^{\frac{7}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \right\} \\
&\quad + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= 2 \int_3^4 g(x)dx + 2 \int_3^{\frac{7}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&\quad + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= 2 \int_3^4 g(x)dx + \int_3^{\frac{7}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&\quad + \int_3^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx
\end{aligned}$$

한편,

$$\int_3^4 g(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 g(x+1)dx \\
&= \int_2^3 g(x)dx + \int_2^3 \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= \int_1^2 g(x+1)dx + \int_2^3 \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= \int_1^2 g(x)dx + \int_1^2 \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx + \int_2^3 \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= \int_1^2 g(x)dx + \int_1^3 \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= 2 + \left[ \frac{2}{x} \right]_1^3 \\
&= 2 - \frac{4}{3} \\
&= \frac{2}{3} \text{---}\ominus
\end{aligned}$$

또,

$$\begin{aligned}
&\int_3^{\frac{7}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx + \int_3^{\frac{9}{2}} \left( -\frac{2}{x^2} \right) dx \\
&= \left[ \frac{2}{x} \right]_3^{\frac{7}{2}} + \left[ \frac{2}{x} \right]_3^{\frac{9}{2}} \\
&= -\frac{2}{21} - \frac{2}{9} \\
&= -\frac{20}{63} \text{---}\ominus
\end{aligned}$$

따라서,  $\ominus$ 과  $\omin�$ 에서

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx &= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx \\
&= 2 \times \frac{2}{3} - \frac{20}{63} \\
&= \frac{84-20}{63} \\
&= \frac{64}{63}
\end{aligned}$$

이므로

$$p+q=63+64=127$$

정답 127