2015학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 A형 정답 및 풀이

01. ④	02. ①	03. ⑤	04. ②	05. ③
06. ①	07. ⑤	08. ④	09. ②	10. ④
11. ⑤	12. ①	13. ⑤	14. ②	15. ③
16. ②	17. ①	18. ④	19. ③	20. ③
21. ①	22. 27	23. 8	24. 88	25. 11
26. 304	27. 5	28. 4	29. 10	30. 196

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$4^{\frac{3}{2}}\times 2$

$=(2^2)^{\frac{3}{2}}\times 2$

$=2^3\times 2$

$=8\times 2=16$

정답 ④

2. **출제의도** : 행렬의 실수배의 정의를 이용하여 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3A=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 6 & 3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $3A$의 모든 성분의 합은 12이다.

정답 ①

3. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+1}{n^3+3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n^3}}$

$=\dfrac{5+0}{1+0}=5$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 그래프의 연결 관계를 행렬로 표현하였을 때 행렬의 모든 성분의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그래프의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 1의 개수는 그래프의 변의 개수의 2배이므로

$4\times 2=8$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 8이다.

정답 ②

5. **출제의도** : 등비수열의 정의를 이용하여 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_5=a_3\times 2^2$

$=12\times 4=48$

정답 ③

6. **출제의도** : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1$$

$$= 1 - 0 = 1$$

정답 ①

7. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$P(A \cap B) = 0$

따라서,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 4P(B)$

이므로

$$P(A) = 3P(B) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 함수의 그래프로부터 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x \to -0} f(x) = 2$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$이므로

$\lim_{x \to -0} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x) = 2 + 2 = 4$

정답 ④

9. **출제의도** : 조건부확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하고자 하는 확률은 $P(B|A)$ 이고

$$P(A) = \frac{130}{300}, \ P(A \cap B) = \frac{70}{300}$$

이므로

$$P(B|A) = \frac{\frac{70}{300}}{\frac{130}{300}} = \frac{7}{13}$$

정답 ②

10. **출제의도** : 실생활에서 로그로 나타내어진 수식에서 로그의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$V = 2C, \ t = \frac{7}{2}t_0$이므로

$\log\left(\frac{t}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{V}{C}$에서

$$\log\left(\frac{\frac{7}{2}t_0}{t_0} - 1\right) = k + 4\log\frac{2C}{C}$$

$$\log\frac{5}{2} = k + 4\log 2$$

$$1 - 2\log 2 = k + 4\log 2$$

$$(\because \log\frac{5}{2} = \log\frac{10}{4} = \log 10 - \log 2^2$$

$$= 1 - 2\log 2)$$

$\therefore \ k = 1 - 6\log 2$

정답 ④

11. **출제의도** : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 사각형의 넓이를 구할 수 있는가?

EBS

정답풀이 :

$A(0,1)$, $B(0,-1)$ 이므로 점 C의 x좌표는

$\log_2(x+1)-1=1$, $\log_2(x+1)=2$

$x+1=4$

$\therefore\ x=3$

또한, 점 D의 x좌표는

$3^{x+1}-2=-1$, $3^{x+1}=1$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

따라서, 사각형 ADBC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(3+1)\times 2=4$$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 자연수의 양의 약수의 개수를 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^n\cdot 5^{n+1}$의 양의 약수의 개수 a_n은

$a_n=(n+1)(n+2)$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답 ①

13. **출제의도** : 이항분포를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(1)>0$, $f(2)>0$ 이므로

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서, 확률변수 X는 이항분포

$B(15,\frac{1}{3})$을 따르므로

$$E(X)=15\times\frac{1}{3}=5$$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 무한급수와 정적분의 관계를 이해하고 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$f(x)=ax(x-3)$

$\quad=a(x^2-3x)$ $(a<0)$

라 하자.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 a(x^2-3x)dx$$

EBS

$$=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=a\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=-\frac{7}{6}a=\frac{7}{6}$$

$\therefore\ a=-1$

$\therefore\ f(x)=-x^2+3x$

따라서 $f'(x)=-2x+3$이므로

$f'(0)=3$

정답 ②

15. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 개의 자연수 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 경우의 수는

$${}_{4+3-1}C_3={}_6C_3$$

$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20\cdots㉠$$

이때, 네 개의 자연수 1,2,4,8은 각각 2^0, 2^1, 2^2, 2^3으로 나타낼 수 있고, $2^6=64$, $2^7=128$ 이므로 ㉠ 중에서

$(2^3,2^3,2^3)$, $(2^3,2^3,2^2)$, $(2^3,2^3,2)$, $(2^3,2^2,2^2)$

인 경우는 제외해야 하므로 구하고자 하는 경우의 수는

$20-4=16$

정답 ③

16. **출제의도** : 수열의 일반항을 구하는 과정에서 수식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}S_k\ (n\geq1)\ \cdots\cdots\ (*)$$

에 의하여

$$\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ (n\geq2)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$(*)$에서 ㉠을 빼면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{S_n}{n}+S_n=\frac{(n+1)S_n}{n}$$

$$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(n+1)^2}}{n}(n\geq2)$$

㉠으로부터 $S_2=2$이고,

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2\ (n\geq3)$$

이므로

$$S_n=\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\cdots\frac{3^2}{2}\times2$$

$$=n\cdot n!\times\frac{1}{2\times1}$$

$$=n!\times\boxed{\frac{n}{2}}\ (n\geq3)$$

이다. 그러므로 a_n은

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\ 2)\\ \dfrac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)! & (n\geq3)\end{cases}$$

이다.

$$\therefore\ f(n)=(n+1)^2,\ g(n)=\frac{n}{2}$$

$$\therefore\ f(4)\times g(20)=5^2\times\frac{20}{2}$$

$$=250$$

정답 ②

17. **출제의도** : 다항함수의 극값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2+a$ 에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서, 모든 극값의 곱이 -4이므로

$f(0)\times f(2)=a(a-4)=-4$

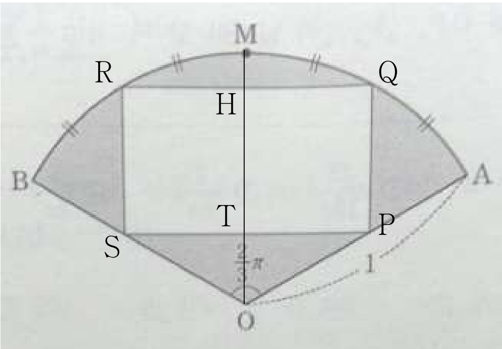
$a^2-4a+4=0,\ (a-2)^2=0$

$\therefore\ a=2$

정답 ①

18. **출제의도** : 도형에 활용된 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위의 그림 R_1에서 직사각형의 꼭짓점을 각각 P, Q, R, S라 하자. 선분 OM과 두 선분 QR, PS의 교점을 각각 H, T라 하자.

$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{QOM}=\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{RQ}}=2\overline{\mathrm{HQ}}=2\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=2\times\dfrac{1}{2}=1$

$\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{OQ}}\times\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 삼각형 OPT에서

$\angle\mathrm{POT}=\dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{PT}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OT}}=\dfrac{\overline{\mathrm{PT}}}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{HT}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OT}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

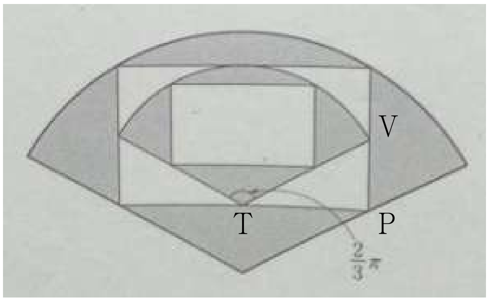
따라서 직사각형 PQRS의 넓이는

$1\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 그림 R_1에서 색칠한 부분의 넓이 S_1은

$S_1=\dfrac{1}{2}\times1^2\times\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{3}$



위의 그림 R_2에서 그림 R_1의 직사각형과 그 내부에 있는 부채꼴이 만나는 한 점을 그림과 같이 점 V라 하자.

삼각형 TPV에서

$\angle\mathrm{VTP}=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\overline{\mathrm{TP}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\overline{\mathrm{TV}}=\frac{\overline{\mathrm{TP}}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

즉, 그림 R_1에서 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이고 그림 R_2에서 작은 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{TV}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$S_2=S_1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S_1$$

……

따라서,

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S_1+\frac{1}{3}S_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_1+\cdots$$

$$=\frac{S_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}S_1$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

정답 ④

19. **출제의도** : 행렬의 관계식을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $AB+A+B=2E$ 에서

$(A+E)(B+E)=3E$

$(A+E)\left\{\frac{1}{3}(B+E)\right\}=E$

$\therefore\ (A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$

따라서, 행렬 $A+E$의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $(A+E)(B+E)=3E$ 에서

$(B+E)(A+E)=3E$ 이므로

$(A+E)(B+E)=(B+E)(A+E)$

$AB+A+B+E=BA+A+B+E$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $A^3+E=O$ 에서

$(A+E)(A^2-A+E)=O$

이때, ㄱ에 의하여 존재하므로

$(A+E)^{-1}(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A^2-A+E=O$

$\therefore\ A^2=A-E$

$AB+A+B=2E$의 양변의 왼쪽에 행렬 A를 곱하면

$A^2B+A^2+AB=2A$

$(A-E)B+(A-E)+AB=2A$

$2AB=A+B+E$

그런데, $AB=2E-A-B$ 이므로

$2(2E-A-B)=A+B+E$

$4E-2A-2B=A+B+E$

$3A+3B=3E$

$\therefore\ A+B=E$ (거짓)

정답 ③

20. **출제의도** : 모평균의 신뢰구간을 이용하여 모집단의 확률분포를 파악하고, 정규분포에서의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

어느 나라에서 작년에 운행된 택시의 주행거리를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서

16개를 임의추출하여 구한 연간 주행거리의 표본평균이 $\overline{x}$이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 m에 대한 신뢰구간은

$$\left[\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}},\ \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\right]$$

즉, $[\overline{x}-0.49\sigma,\ \overline{x}+0.49\sigma]$

$\therefore\ c=0.49\sigma$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X\le m+c)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 0.49)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.49)$$
$$=0.5+0.1879=0.6879$$

정답 ③

21. **출제의도** : 함수의 그래프와 접선의 관계를 이용하여 함수를 정할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에 $x=1$을 대입하면

$0\le f(1)\le 0$

$\therefore\ f(1)=0\cdots$㉠

또한, 조건 (나)에서 $x\neq1$일 때, 즉

(i) $x>1$

$$\frac{6x-6}{x-1}\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\frac{2x^3-2}{x-1}$$

그런데,

$$\lim_{x\to1+0}\frac{6x-6}{x-1}=6,$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{2x^3-2}{x-1}=\lim_{x\to1}2(x^2+x+1)=6$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

$x<1$일 때도 같은 방법으로 생각하면

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=6\cdots㉡$$

따라서, 다항함수 $f(x)$가 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 삼차이하의 다항함수이어야 한다.

(i) $f(x)$가 일차함수인 경우

최고차항의 계수가 1이면서 ㉡을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 일차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)=x^2+ax-3$ ($\because$(가))라 하면 ㉠에서

$f(1)=a-2=0\quad\therefore\ a=2$

그런데, $f'(x)=2x+2$ 이므로 ㉡을 만족시킬 수는 없다. 따라서, 조건을 만족시키는 이차함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(iii) $f(x)$가 삼차함수인 경우

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ ($\because$(가))라 하면 ㉠에서

$f(1)=a+b-2=0\quad\therefore\ a+b=2\cdots$㉢

$f'(x)=3x^2+2ax+b$라 하면 ㉡에서

$f'(1)=2a+b+3=6\quad\therefore\ 2a+b=3\cdots$㉣

㉢, ㉣에서 $a=1,\ b=1$ 이므로

$f(x)=x^3+x^2+x-3$

$\therefore\ f(3)=3^3+3^2+3-3=36$

정답 ①

22. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3}{x-2} = \frac{3^3}{3-2} = 27$$

정답 27

23. **출제의도** : 행렬로 표현된 연립일차 방정식 해가 주어졌을 때, 행렬을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$의 해가 $x=-1$, $y=2$이므로

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a+2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ b \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-a+2=-2$, $4=b$

즉, $a=4$, $b=4$ 이므로

$a+b=8$

정답 8

24. **출제의도** : 등차수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$$a_1 + a_{10} = a + (a+9d)$$
$$= 2a+9d = 22$$

이므로

$$\sum_{k=2}^{9} a_k = a_2 + a_3 + \cdots + a_9$$
$$= \frac{8(a_2+a_9)}{2}$$
$$= \frac{8(a+d+a+8d)}{2}$$
$$= 4(2a+9d)$$
$$= 4 \times 22 = 88$$

정답 88

25. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=3$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

이 성립해야 한다.

$$\therefore a = \lim_{x \to 3} \frac{(3x+2)(x-3)}{x-3}$$
$$= \lim_{x \to 3}(3x+2)$$
$$= 3 \times 3 + 2 = 11$$

정답 11

26. **출제의도** : 정적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^x f(x)dx = x^3 + 4x$$

의 양변을 x에 관하여 미분하면

$f(x) = 3x^2 + 4$

$\therefore$ $f(10) = 3 \times 10^2 + 4 = 304$

정답 304

EBS

27. 출제의도 : 접선을 활용하여 점과 직선 사이의 거리가 최소가 될 접점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}(x>0)$ 에서 $y'=x^2$

또한, 직선 $y=x-10$은 기울기가 1이므로 $x^2=1$ 에서

$x=1$

따라서, $y=\frac{1}{3}+\frac{11}{3}=4$ 이므로 점 P의 좌표는 $(1,4)$이다.

$\therefore\ a+b=5$

정답 5

28. 출제의도 : 도형과 관련된 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

자연수 n에 대하여 점 $(3n, 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n의 방정식은

$(x-3n)^2+(y-4n)^2=(3n)^2$

이다.

점 $(3n, 4n)$과 점 $(0, -1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}=\sqrt{25n^2+8n+1}$

이므로

$a_n=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n$

$b_n=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}-3}$$

$$=\frac{5+3}{5-3}=4$$

정답 4

29. 출제의도 : 연속확률변수 X을 이해하고 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$P(0\le X\le 3)=1$ 이어야 하므로

$P(0\le X\le 3)=3a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

$\therefore\ P(0\le X<a)$

$=P(0\le X<\frac{1}{3})$

$=P(0\le X\le 3)-P(\frac{1}{3}\le X\le 3)$

$=1-\frac{1}{3}(3-\frac{1}{3})$

$=1-\frac{1}{3}\times\frac{8}{3}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ p+q=10$

정답 10

30. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 관련된 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x-a)^2+(y-b)^2=1=2^0\cdots$ ㉠

$(x-a)^2+(y-b)^2=4=2^2 \cdots$ ㉡

곡선 $y=2^x$이 원 ㉠과는 만나지 않고

원 ㉡과 적어도 한 점에서 만나므로

$a=1$일 때, $2^2<b\le 2^3$

$a=2$일 때, $2^0\le b<2^1$ 또는 $2^3<b\le 2^4$

$a=3$일 때, $2^1\le b<2^2$ 또는 $2^4<b\le 2^5$

$a=4$일 때, $2^2\le b<2^3$ 또는 $2^5<b\le 2^6$

$a=5$일 때,

$2^3\le b<2^4$ 또는 $2^6<b\le 100$

$a=6$일 때, $2^4\le b<2^5$

$a=7$일 때, $2^5\le b<2^6$

$a=8$일 때, $2^6\le b\le 100$

이어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$2^2+(2^0+2^3)+(2^1+2^4)+(2^2+2^5)$$
$$+(2^3+36)+2^4+2^5+37$$
$$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^5)+37$$
$$+(2^2+2^3+2^4+2^5)+36$$
$$=\frac{1(2^6-1)}{2-1}+\frac{2^2(2^4-1)}{2-1}+73$$
$$=63+60+73$$
$$=196$$

정답 196